II.3. Sur la normalisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Il n'y a pas d'analogue ici au corollaire de la proposition 3, même pour les surfaces normales; cela résulte par exemple des surfaces étudiées au chapitre III. De fait, un théorème fondamental de Mumford affirme que les singularités analytiques se détectent par le seul groupe fondamental. Plus précisément, soient X une portion de surface plongée dans $\mathbf{C}^k$ et x_0 un point de X; on suppose que $X - \{x_0\}$ est lisse. Soit S une petite sphère centrée en x_0. L'intersection $X \cap S$ est une variété différentiable (si le rayon de la sphère est suffisament petit) de dimension réelle 3; il est facile de voir que le type topologique de cette variété ne dépend pas du rayon de la sphère. Le théorème de Mumford affirme que le groupe fondamental de $X \cap S$ est trivial si et seulement si x_0 est un point lisse de X [16].

II.3. Sur la normalisation

On appelle *normalisation* d'un ensemble analytique X la donnée d'un ensemble normal $\tilde{X}$ et d'un morphisme propre fini surjectif $\nu: \tilde{X} \to X$ ayant la propriété suivante: si $A = \nu^{-1}(X - X_{\text{rég}})$, alors $\tilde{X} - A$ est dense dans $\tilde{X}$ et la restriction de ν est un isomorphisme de $\tilde{X} - A$ sur $X_{\text{rég}}$. Il est facile de montrer que deux normalisations d'un même ensemble sont isomorphes au sens convenable. C'est par contre un résultat très profond que tout espace possède une normalisation (voir [5], appendice au chapitre 2, et [18]); remarquons seulement que nous l'avons essentiellement montré dans le cas très particulier des courbes planes. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant, qui dit qu'on peut parfois « normaliser les morphismes » (voir par exemple [5], page 2.28).

Proposition 8. Soient X et Y des ensembles analytiques, $\nu_X: \tilde{X} \to X$ et $\nu_Y: \tilde{Y} \to Y$ leurs normalisations, et $f: X \to Y$ une application holomorphe telle que $A = f^{-1}(Y_{\text{rég}})$ soit dense dans X. Alors il existe une application holomorphe $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ telle que $\nu_Y \tilde{f} = f \nu_X$.

Preuve. Soit $\tilde{A} = \nu_X^{-1}(A)$. Comme A est dense dans X, il en est de même de $A \cap X_{\text{rég}}$, et $\nu_X^{-1}(A \cap X_{\text{rég}})$ est dense dans $\nu_X^{-1}(X_{\text{rég}})$ lui-même dense dans $\tilde{X}$; donc $\tilde{A}$ est dense dans $\tilde{X}$.

La restriction de $f\nu_X$ applique $\tilde{A}$ dans $Y_{\text{rég}}$ et se relève donc en F: $\tilde{A} \to \nu_y^{-1}(Y_{\text{rég}})$. Si K est un compact de $\tilde{X}$, alors $(f\nu_X)(\tilde{A} \cap K) \subset L = (f\nu_X)(K)$ qui est compact; $F(\tilde{A} \cap K)$ est donc relativement compact dans $\tilde{Y}$ puisque ν_y est propre. Par suite, l'image par F de tout compact est relativement compacte, ce qui veut précisément dire que F est bornée.

L'ensemble $\tilde{X} - \tilde{A}$ est contenu dans un sous-ensemble analytique propre de $\tilde{X}$ car $X - A$ est dans $f^{-1}(Y - Y_{\text{rég}})$. Comme $\tilde{X}$ est normal, F se prolonge en un morphisme $\tilde{f}$: $\tilde{X} \to \tilde{Y}$. Il est évident que $\tilde{f}$ est l'unique morphisme satisfaisant $\nu_Y \tilde{f} = f \nu_X$. ■

Sans l'hypothèse que A est dense dans X, il n'y a en général ni existence ni unicité. En effet, soient d'abord X un ensemble normal, $S = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 | xy = 0\}$ et f l'application de X sur le point double de S. Alors $\tilde{S}$ est réunion disjointe de deux droites, l'image inverse par ν_S du point double est formée de deux points, et f a plusieurs relèvements.

Ensuite, l'exemple ci-dessous montre qu'il peut n'exister aucune « normalisée ». Soient T un tore de dimension complexe un, σ une involution sans point fixe de T et X le tore T/σ. Sur le fibré trivial $L = T \times \mathbf{C}$, considérons la relation d'équivalence

$$(a, z) \sim (a', z') \begin{cases} \text{si } a = a' & \text{et} \quad z = z' \\ \text{ou si } a = \sigma(a') & \text{et} \quad z = z' = 0 . \end{cases}$$

L'espace quotient Y est muni naturellement d'une structure de fibré analytique π: $Y \to X$; si U est un ouvert trivialisant de X pour ce fibré, alors $\pi^{-1}(U) = U \times S$ avec S comme dans l'exemple précédent.

L'ensemble analytique X est lisse, donc normal; l'ensemble $Y_{\text{sing}} = Y - Y_{\text{rég}}$ est de codimension un dans Y (en particulier Y n'est pas normal) et $\tilde{Y}$ se fibre sur X avec pour fibre la réunion disjointe de deux droites. Soit $E = \nu_Y^{-1}(Y_{\text{sing}})$. Alors $\tilde{Y} - E$ est homéomorphe à $Y_{\text{rég}}$, donc est connexe (car $Y_{\text{rég}}$ est l'image par $L \to Y$ de l'ensemble $L - T \times \{0\}$ qui est connexe); comme il est dense dans $\tilde{Y}$, celui-ci est aussi connexe. Par suite E est connexe, car c'est un rétracte de $\tilde{Y}$, et la restriction de ν_Y à E est le revêtement connexe à deux feuilles de Y_{sing}.

Si $f: X \to Y$ est la section nulle du fibré π, (de sorte que le A de la proposition 8 est vide), il est alors évident que f ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\
X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient n et q des entiers, avec n positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de C^2 de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où ζ est une racine n-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre n. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo n); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).