Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: II.1. Ensembles normaux
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

applique un point (x, y) sur l'intersection avec $\mathbf{S}^3$ de l'image du chemin $\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}^2 \\ t \mapsto (t^2x, t^5y) \end{cases}$. En particulier γ^* est connexe et $\underline{f}$ est bien irréductible.

La transformée stricte de f est donnée par

$$\tilde{f}(u, v) = v^{-2}(v^5 + (uv)^2) = u^2 + v^3$$

qui est comme f de multiplicité 2. La tangente de $\underline{\tilde{f}}$ est la droite d'équation $u = 0$, qui est transverse à E_0.

Soient alors $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $g(x, y) = x^3 + y^2$ de sorte que $\underline{g} = \underline{\tilde{f}}$ (pas $g(x, y) = x^2 + y^3$ qui aurait comme tangente la droite d'équation $x = 0$). On a $\tilde{g}(u, v) = u^2 + v$, qui est de multiplicité 1, et dont la tangente à l'origine est bien E_0.

Exemple 4. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = y^5 + x^5y + g(x, y)$ avec g de multiplicité 8 au moins. Montrons que $\underline{f}$ est réductible.

On a $\tilde{f}(u, v) = u^5 + uv + h(u, v)$ avec h d'ordre 3 au moins. Donc $\underline{\tilde{f}}$ a deux tangentes, d'où l'assertion par les propositions 5 et 6 (jj).

II. SINGULARITÉS NORMALES DANS $\mathbf{C}^3$

II.1. Ensembles normaux

Si X est un ensemble analytique, $X_{\text{rég}}$ désigne l'ouvert de ses *points réguliers*; on sait qu'il est dense dans X. (Voir le corollaire de la proposition 1 si X est une courbe plane, l'argument de la proposition 7 ci-dessous si X est une hypersurface dans $\mathbf{C}^k$, et le théorème III. C.3 de [8] en général.)

Rappelons qu'un ensemble X est *irréductible* en un point p si X n'est pas au voisinage de p réunion de deux sous-ensembles propres. Dans ce cas, on peut trouver un voisinage de p dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe. Réciproquement, s'il existe un bon voisinage U de P dans X dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe, alors X est irréductible en p. (Voir la proposition 2 si X est une courbe plane, et la fin de la section III.C de [8] pour le cas général.) Le terme de « bon voisinage » pour U signifie qu'il existe une base de voisinages $\{U_\alpha\}$ de p dans X telle que chaque $U_\alpha - \{p\}$ soit un rétracte par déformation de $U - \{p\}$; voir [21].

On appelle fonction *faiblement holomorphe* sur un voisinage ouvert U d'un point p de X une fonction définie et holomorphe sur $U \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ qui est bornée sur $K \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ pour tout compact K de U; on dit que l'espace X est *normal* en p si toute fonction de ce type admet un prolongement (nécessairement unique par continuité) en une fonction holomorphe sur U. Par exemple, X est normal en tous ses points réguliers (c'est un cas particulier du théorème d'extension de Riemann) et n'est normal en aucun de ses points réductibles (choisir un voisinage connexe U de p dans X et une partition $U_0 \cup U_1$ de $U \cap X_{\text{rég}}$ en ouverts disjoints non vides, puis définir f comme valant 0 sur U_0 et 1 sur U_1). Soit $\mathcal{O}_{X,p}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point p de X; pour que X soit normal en p, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_{X,p}$ soit intégralement clos. (La nécessité résulte immédiatement des définitions; pour la suffisance, voir par exemple [18]; en général, la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{X,p}$ coïncide avec l'anneau des germes de fonctions faiblement holomorphes.)

C'est un corollaire facile de la proposition 3 qu'une courbe plane est normale en un point si et seulement si elle y est lisse. Soient par exemple

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid x^2 = y^3\} \qquad \text{et} \qquad f: \begin{cases} \gamma - \{0\} \to \mathbf{C} \\ (x, y) \mapsto x/y\,; \end{cases}$$

alors f a un prolongement continu non holomorphe qui applique l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur 0, de sorte que γ n'est pas normale à l'origine. Dans toute courbe (plane ou non), on sait que les points normaux coïncident avec les points lisses. L'objet de ce chapitre est d'examiner la nature des singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$.

Dans les sections suivantes, nous ferons un usage répété d'un théorème de H. Cartan [3]: Soient M une variété lisse et G un *groupe fini* opérant holomorphiquement sur M. Alors l'espace des orbites $X = M/G$ possède une structure canonique d'ensemble analytique normal (= normal en chaque point). Si $\pi: M \to X$ est la projection canonique, U un ouvert de X, et $f: U \to \mathbf{C}$ une application, alors f est holomorphe pour la structure en question si et seulement si $f\pi$ l'est sur $\pi^{-1}(U)$.

II.2. Les singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$ sont isolées

Soit $\underline{\Gamma}$ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. On peut supposer $\underline{\Gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass. Plus précisément, il existe