Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Autor: Malgrange, Bernard

Kapitel: §9. — DÉMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46900

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

gênant, il suffirait de séparer les parties réelles et imaginaires); on prend ici $\Phi(x, A'') = M_{21} + M_{22} A'' - A'' M_{11} - A'' M_{12} A''$; on a bien $\Phi(0,0) = M_{21}(0) = 0$; et $\frac{\partial \Phi}{\partial A''}(0,0)$ est l'application $\alpha \mapsto M_{22}(0)\alpha - \alpha M_{11}(0) = Q\alpha - \alpha P$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^p)$; le lemme (6.2) montre que les valeurs propres de cette application sont les $\mu_j - \lambda_i$, donc ont leur partie réelle non nulle; la remarque 8.3 donne alors l'existence d'une solution formelle $\hat{A}''$, et le corollaire 8.2 l'existence de A''; on opère de même avec les blocs (1 2) et (2 2) pour trouver A'.

Remarque 8.5. Si l'on affaiblit les hypothèses de la proposition 8.4 en supposant seulement qu'on a, pour tout (i, j) $\lambda_i \neq \mu_j$, la partie formelle du raisonnement précédent montre qu'on peut trouver A, avec $A(0) = I$, tel que $\hat{N}$ soit de la forme $N = \begin{pmatrix} \hat{N}' & 0 \\ 0 & \hat{N}'' \end{pmatrix}$. Cela jouera un rôle important dans la suite (en fait, le théorème (7.1) montrera finalement que la proposition 8.4 reste vraie sous cette hypothèse affaiblie; mais, au point où nous en sommes, nous n'avons pas encore le droit d'utiliser ce résultat; comme on va le voir, cela va nous obliger à quelques contorsions!).

§ 9. — Démonstration du lemme fondamental

A. Démontrons d'abord le résultat pour $m = 1$; soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - m$, $m \in \mathscr{E}$; si $Re\, m(0) \neq 0$, cela résulte de 8.1; si $k \geqslant 1$, et $m(0) = ik\lambda$, $\lambda \neq 0$, la transformation $f = \exp(-i\lambda x^{-k}) f_1$ nous ramène à $m(0) = 0$, donc on est ramené de k à $k - 1$; par récurrence, on est ramené à $k = 0$, i.e. au cas d'un point singulier régulier.

Dans la suite, nous procéderons par récurrence sur m, et supposerons donc le résultat établi pour $1, \ldots, m - 1$.

B. Si $k = 0$, le résultat est établi par la proposition 7.3. Supposons donc $k \geqslant 1$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $M(0)$; supposons qu'on ait, pour un i au moins $Re(\lambda_i) \neq 0$; alors le lemme fondamental résulte de l'hypothèse de récurrence; en effet, si pour tout i on a $Re\, \lambda_i \neq 0$, on est dans le cas favorable 8.1; si, pour un j, on a $Re\, \lambda_j = 0$, on peut décomposer $M(0)$ par une transformation linéaire en deux blocs $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, les

valeurs propres de P (resp de Q) étant toutes de partie réelle $\neq 0$ (resp $= 0$); le lemme fondamental résulte alors de 8.4 et de l'hypothèse de récurrence.

C. Supposons maintenant $k \geqslant 1$, et supposons que les valeurs propres de $M(0)$ vérifient toutes $Re\,\lambda_j = 0$. On appelera « système standard » un tel système, muni d'une décomposition du type suivant: on suppose donnée une partition de $\{1, \ldots, m\}$ en sous-ensembles $\{1, \ldots, m_1\}$, $\{m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2\}, \ldots, \{m_1 + \ldots + m_{p-1}, \ldots + m_1 + \ldots + m_p = m\}$ avec $m_1, \ldots, m_p \neq 0$, tel que, dans cette décomposition, les termes non diagonaux de $\hat{M}$ soient nuls (« les termes de couplage entre les différents blocs sont plats »). A un tel « système standard », on associe les deux entiers $C(D) = m - p$ (son « couplage ») et $i(D)$, son irrégularité; on a $0 \leqslant C(D) \leqslant m - 1$, et $C(D) = 0$ signifie que tous les m_i sont égaux à 1; d'autre part, en posant

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & \hat{M}_p \end{pmatrix}. \quad \hat{D}_j = x^{k+1} \frac{d}{dx} - \hat{M}_j,$$

on a facilement $i(D) = \Sigma\, i(\hat{D}_j)$.

On ordonne les couples (C, i) lexicographiquement, i.e. on pose $(C, i) \leqslant (C', i')$ si $C < C'$ ou $C = C'$, $i \leqslant i'$. Pour démontrer le lemme fondamental, nous allons faire une seconde récurrence sur (C, i), et plus précisément démontrer le résultat suivant.

Lemme (C, i). *(On suppose toujours m fixé, et le résultat démontré pour $m' < m$).*

Soit $i > 0$, et supposons le résultat démontré pour les systèmes standard D avec $(C(D), i(D)) < (C, i)$. Alors, le résultat est vrai pour les systèmes standard D vérifiant $(C(D), i(D)) = (C, i)$.

Par récurrence, on sera ramené au cas où $i(D) = 0$, c'est-à-dire au cas des points singuliers réguliers, cas réglé par la proposition 7.3.

D. Restons dans la situation précédente, et supposons qu'une des valeurs propres λ_1 d'un des $M_j(0)$, disons de $M_1(0)$ soit $\neq 0$. Deux cas sont alors possibles. 1) Si $M_1(0)$ a deux valeurs propres distinctes d'après la remarque (8.5) on peut décomposer le système $\hat{D}_1$; par ce procédé, on a diminué $C(D)$.

2) Si toutes les valeurs propres de $M_1(0)$ sont égales à $\lambda_1 = i k \mu$, $(\mu \in \mathbf{R} - \{0\})$, on fait la transformation $F_1 = \exp(-i\mu x^{-k}) F'_1$, $F_2 =$

$F'_2, \ldots, F_p = F'_p$ (en posant $F_1 = (f_1, \ldots, f_{m_1})$ etc.); alors on ne change pas $\hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_p$, et on a remplacé $\hat{D}_1$ par $\hat{D}'_1 = x^{k+1} \dfrac{d}{dx} - (\hat{M}_1 - \lambda_1 I)$; on n'a donc pas changé $C(D)$ et, d'après la proposition (5.6), on a diminué $i(\hat{D}_1)$, donc $i(D) = \Sigma\, i(\hat{D}_j)$. Dans les deux cas, on a démontré (C, i).

Notons que ce procédé permet, en particulier en raisonnant comme en A et B de démontrer $(0, i)$ par récurrence descendante sur i (formellement, cette remarque n'est pas indispensable pour la suite).

E. Reste à régler le cas où les $M_j(0)$ sont tous nilpotents. Nous allons faire une transformation (« transformation de Turrittin-Katz », voir Deligne [1] ou Katz [1]) qui élimine ce cas. Pour plus de clarté, expliquons d'abord en quoi consiste cette transformation lorsqu'on a $p = 1$. Comme on l'a déjà observé en démontrant la proposition 7.3 on peut multiplier D par une puissance de x, et faire sur D une transformation du type $F = A F_1$, avec $A \in \mathrm{Gl}(m, K\mathscr{E})$; en particulier, en utilisant le théorème (3.1) (avec $\hat{K}$ au lieu de K), on peut supposer que l'on a $D = x \dfrac{d}{dx} - M$, $\hat{M}$ ayant la forme suivante

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \hat{\lambda}_{m-1} & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda_j \in K\,\mathscr{E}$$

Faisons alors la transformation suivante
$f_1 = x^{-r} g_1$, $f_2 = x^{-2r} g_2, \ldots, f_m = x^{-mr} g_m$, $r \geqslant 0$ à déterminer;
le système devient $G \mapsto x^{r+1} \dfrac{dG}{dx} - N\,G$, avec $\hat{N}$ donné par la formule suivante

$$N = \begin{bmatrix} r\,x^r & 1 & & & 0 \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & (m-1)\,r\,x^r & & 1 \\ \hat{\lambda}_1\,x^{mr} & \cdots & \hat{\lambda}_{m-1}\,x^{2r} & & (\hat{\lambda}_m + mr)\,x^r \end{bmatrix}$$

Si les λ_i n'ont pas de pôle, on est dans le cas régulier et l'on prend $r = 0$; sinon, en choisissant r satisfaisant aux inégalités qui suivent, on élimine les pôles:

$$-v(\lambda_1) \leqslant m\,r, \ldots, -v(\lambda_m) \leqslant r.$$

Pour obtenir une partie principale d'ordre 0 non nilpotente, il faudra alors choisir $r = \sup\left(-\dfrac{v(\lambda_j)}{m-j+1}\right)$; si r est entier, cela va bien, sinon, on pose $r = \dfrac{l}{q}$, et on fait le changement de variable $x = y^q$ (ce qui ne gêne pas pour démontrer le lemme fondamental); combiné avec la transformation précédente, on arrive finalement à une équation $G \mapsto y^{l+1}\dfrac{dG}{dy} - q\,P$, avec $P \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^m)$, et $P(0)$ ayant la forme suivante

$$P(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ d_1 & \ldots & d_{m-1} & d_m \end{bmatrix}$$

avec $d_j = \lim\limits_{r \to 0} \lambda_j(x)\,x^{jr}$; donc certains d_j sont $\neq 0$; comme l'équation caractéristique de $P(0)$ est $\lambda^m = d_m\lambda^{m-1} + \ldots + d_1$, $P(0)$ est non nilpotente.

Observons enfin ceci: si toutes les valeurs propres de $P(0)$ sont confondues, leur somme d_m est $\neq 0$; par suite on a $r = -v(\lambda_m)$, donc r est entier et l'on peut prendre $q = 1$.

Revenons maintenant à la situation générale: à $\hat{D}_1, \ldots, \hat{D}_p$ correspondent respectivement des rationnels $r_1, \ldots, r_p$, l'un au moins étant > 0, (sinon on est dans le cas régulier); on prend alors $r = \sup(r_1, \ldots, r_p)$, et on fait simultanément la transformation de Turrittin-Katz avec cette valeur de r sur $\hat{D}_1, \ldots, \hat{D}_p$, joint au changement de variable $y = x^q\,(r = \dfrac{l}{q})$; on a alors remplacé D par $D' = y^{l+1}\dfrac{d}{dy} - \hat{N}$, avec $N = \begin{pmatrix} \hat{N}_1 & 0 \\ 0 & \hat{N}_p \end{pmatrix}$, l'une au moins des matrices $\hat{N}_j(0)$ étant non nilpotente.

On est alors dans le cas B, le cas D_1 ou le cas D_2; dans le cas B, le résultat suit par récurrence sur m; dans le cas D_1, on diminue $C(D)$; dans

le cas D_2, d'après la remarque précédente, r est entier, donc le procédé donné en D_2 diminue $i(D)$.

Le lemme (C, i) et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

Remarque. Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité $i(D)$, il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori « l'irrégularité de Katz », i.e. le nombre r qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer (voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

§ 10. — Applications

A. Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général:

Théorème 10.1. Soit Φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ des $2m+1$ variables x, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, et $Z = (z_1, \ldots, z_m)$ au voisinage de $0, Y^0, Z^0$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; supposons qu'il existe une série formelle $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$ (à coefficients réels) vérifiant $H(0) = Y^0$, $\frac{dH}{dx}(0) = Z^0$, et $\hat{\Phi}(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$; supposons enfin que la matrice $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial Z}(x, H(x), \frac{dH}{dx})$ soit inversible sur $\hat{K}$ (i.e. appartienne à $\mathrm{Gl}(m, \hat{K})$); alors, il existe $F \in \mathscr{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $\Phi(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$.

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.

a) On traite d'abord le cas où l'on a $\Phi(x, Y, Z) = \Psi(x, Y)Z - \chi(x, Y)$, Ψ une matrice d'ordre m à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; pour cela, on se ramène au cas où $H = 0$, donc $Y^0 = Z^0 = 0$; on a alors la situation suivante: $\chi(x, 0)$ est plat, et $\Psi(x, 0)$ est inversible dans $K\mathscr{E}$; il existe donc $M \in \mathrm{End}(\mathscr{E}^m)$ et $k \in \mathbf{N}$ tel qu'on ait $M\Psi(x, 0) = x^k I$; posons alors $F = x^k G$; on a $M\Psi(x, x^k G) = x^k \Psi_1(x, G)$, avec $\Psi_1(x, 0) = I$, donc $\Psi_1(x, Y)$ inversible au voisinage de $(0, 0)$ dans les matrices à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; on a aussi $M\chi(x, x^k G) = x^k \chi_1(x, G)$, avec χ_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$; on est alors ramené à l'équation