

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 20 (1974)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FORMES-VOLUME SUR LES VARIÉTÉS A BORD  
**Autor:** Banyaga, Augustin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-46898>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# FORMES-VOLUME SUR LES VARIÉTÉS A BORD

par Augustin BANYAGA

## 1. Introduction

Soit  $M$  une variété différentiable. Une famille à 1-paramètre de formes-volume  $\tau_t$  est la donnée pour tout  $t \in [0, 1]$ , d'une forme différentielle de degré maximum, partout non nulle,  $C^\infty$ , et variant différentiablement avec  $t$ .

Moser [1] a démontré que si  $\tau_t$  est une famille à 1-paramètre de formes-volume sur une variété différentiable  $M$  connexe et compacte sans bord, la condition  $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$ , pour tout  $t$ , entraînait l'existence d'une isotopie  $\Phi_t$  de  $M$  telle que  $\Phi_t^* \tau_t = \tau_0$ .

Nous donnons ici une généralisation de ce théorème aux variétés compactes, connexes, à bord, par une méthode qui évite l'emploi des formes harmoniques. Notre résultat s'énoncera ainsi:

**THÉORÈME.** Soit  $M$  une variété différentiable orientable, à bord  $\partial M$ , compacte et connexe de dimension  $n$ ,  $\tau_t$  une famille à 1-paramètre de formes-volume. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$ , pour tout  $t$
- (ii) Il existe une famille à 1-paramètre de  $(n-1)$ -formes  $\alpha_t$  telles que  $\partial \tau_t / \partial t = d \alpha_t$  et  $\alpha_t(x) = 0$  pour tout  $x \in \partial M$ .
- (iii) Il existe une isotopie  $\Phi_t$  de  $M$  telle que

$$\Phi_t^* \tau_t = \tau_0, \Phi_0 = \text{id et } \Phi_t|_{\partial M} = \text{id}.$$

## 2. Nous utiliserons les lemmes suivants:

*Lemme 1.* Il existe un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i=0, \dots, m}$ ,  $m < \infty$ , de  $M$  où tous les  $U_i$  sont des ouverts non vides de  $M$  tels que  $U_0 \subset \bigcap_{i=1}^m U_i$  et  $U_0 \cap \partial M = \emptyset$ , les  $\varphi_i$  étant des difféomorphismes préservant l'orientation de  $U_i$  sur  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ .

*Démonstration.* Le lemme est trivial pour  $n = 1$ . Supposons  $n > 1$ . Soit  $x_0 \in M \setminus \partial M$  et  $y \in M$ . Soit  $\psi$  une carte locale en  $y$ , c'est-à-dire un difféomorphisme d'un voisinage  $V_y$  de  $y$  sur  $\mathbf{R}^n$  ou  $\mathbf{R}_+^n$ . Soit  $x_1$  un point de  $V_y$  différent de  $y$  et pris hors du bord. On choisit un chemin différentiable  $c(t)$ , évitant  $y$  et le bord et reliant  $x_0$  à  $x_1$  c'est-à-dire tel que  $c(0) = x_0$  et  $c(1) = x_1$ . Ceci est possible en dimension  $> 1$  par connexité.

D'après le théorème d'extension des isotopies (voir Palais [4]), il existe une isotopie  $H_t$  de  $M$  telle que

$$H_t(y) = y, H_t(x_1) = c(t), \text{ pour tout } t.$$

Posons  $U_y = H_0(V_y)$ ; c'est un ouvert contenant  $x_0$  et  $y$ . Soit  $\varphi_y$  la carte de source  $U_y$  définie par  $\varphi_y = \psi_0 H_0^{-1}$ . Comme  $M$  est compact on peut extraire du recouvrement  $\{U_y\}_{y \in M}$  un recouvrement fini  $U_1, \dots, U_m$ ; soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  les cartes correspondantes. Comme  $x_0 \in U_1$  pour tout  $i$ ,  $\bigcap_{i=1}^m U_i = U_0 \neq \emptyset$ . On diminue éventuellement  $U_0$  pour que  $U_0 \cap \partial M = \emptyset$  et qu'il existe une carte  $\varphi_0$  de  $U_0$  sur  $\mathbf{R}^n$ .

Désignons par  $\Lambda_c^p(\mathbf{R}^n)$ , (respectivement  $\Lambda_c^p(\mathbf{R}_+^n)$ ) l'espace des  $p$ -formes de classe  $C^\infty$ , à support compact dans  $\mathbf{R}^n$  (respectivement dans  $\mathbf{R}_+^n$ ). On le munit de la topologie suivante: on dira qu'une suite de formes  $\{\varphi_v\}_{v \in \mathbf{N}}$ , de coefficients  $\varphi_v^{i_1 \dots i_p}$ , tend vers 0 dans  $\Lambda_c^p(\mathbf{R}^n)$  (ou  $\Lambda_c^p(\mathbf{R}_+^n)$ ) si et seulement si leurs supports restent dans un compact fixe  $K$  et pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  les suites  $D^\alpha \varphi_v^{i_1 \dots i_p}$  tendent uniformément vers 0 quand  $v \rightarrow \infty$ .

Le bord  $\partial \mathbf{R}_+^n$  de  $\mathbf{R}_+^n$  est le sous-espace  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$ , et l'intérieur de  $\mathbf{R}_+^n$  est  $\mathbf{R}_+^n \setminus \partial \mathbf{R}_+^n$ .

*Lemme 2.* Pour toute forme  $\omega \in \Lambda_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ , à support dans l'intérieur de  $\mathbf{R}_+^n$  et telle que  $\int \omega = 1$ , il existe un opérateur

$$I_n^\omega: \Lambda_c^n(\mathbf{R}^n) \rightarrow \Lambda_c^{n-1}(\mathbf{R}^n) \text{ (resp. } I_n^\omega: \Lambda_c^n(\mathbf{R}_+^n) \rightarrow \Lambda_c^{n-1}(\mathbf{R}_+^n))$$

linéaire et continu au sens de la topologie mentionnée plus haut et tel que l'on ait

- 1)  $d I_n^\omega(\alpha) = \alpha - \omega \int \alpha, \forall \alpha \in \Lambda_c^n(\mathbf{R}^n),$
- 2)  $(I_n^\omega(\alpha))(x) = 0, \forall x \in \partial \mathbf{R}_+^n.$

*Remarques*

- 1) Dans la suite  $I_n^\omega$  sera désigné par  $I_n$  seulement.
- 2) Ce lemme est une modification d'un lemme de de Rham [3].

*Démonstration.*

1. *Cas de  $\bigwedge_c^n(\mathbf{R}^n)$ .* On construit  $I_n$  par récurrence en convenant que  $I_0 = 0$  et en choisissant une forme particulière

$$\bar{\omega} = a(x_1) a(x_2) \dots a(x_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où  $a(t)$  est une fonction quelconque, de classe  $C^\infty$ , positive ou nulle, à support dans l'intervalle  $[1, 2]$  et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t) dt = 1$ . Il est clair que  $\int \bar{\omega} = 1$ .

Désignons par  $d'$  l'application de  $\bigwedge^r(\mathbf{R}^n)$  dans  $\bigwedge^{r+1}(\mathbf{R}^n)$  définie par  $d' = \sum_{i=1}^{n-1} d x_i \wedge \partial / \partial x_i$ . On a  $d = d' + d x_n \wedge \partial / \partial x_n$ ,

$$\bar{\omega} = \omega' \wedge a(x_n) d x_n,$$

avec  $\omega' = a(x_1) \dots a(x_{n-1}) d x_1 \wedge \dots \wedge d x_{n-1}$

et toute forme  $\alpha \in \bigwedge^n(\mathbf{R}^n)$  s'écrira  $\alpha = \alpha_1(x_n) \wedge d x_n$  où  $\alpha_1(x_n)$  est une  $(n-1)$ -forme dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  ( $x_n$  étant pris comme paramètre). Suivant [3], on pose

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d x_n + (-1)^{n-1} \omega' \left\{ \int_{-\infty}^{x_n} (\int \alpha_1(t) - a(t) \int \alpha) d t \right\}.$$

C'est bien un opérateur linéaire et continu. La propriété annoncée se vérifie par un calcul direct.

$$d \bar{I}_n \alpha = d (\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d x_n) + (-1)^{n-1} d (\omega' \{ \int \dots \} ),$$

$$\begin{aligned} d (\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d x_n) &= \left( d' + d x_n \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d x_n) \\ &= d' (\bar{I}_{n-1}(\alpha_1)) \wedge d x_n \\ &= (\alpha_1 - \omega' \int \alpha_1) \wedge d x_n, \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ &= \alpha - (\omega' \wedge d x_n) \int \alpha_1. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left( d' + d x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) (\omega' \{ \dots \}) &= d x_n \wedge \omega' \frac{\partial}{\partial x_n} \{ \int \dots \} \\ &= ((-1)^{n-1} \omega' \wedge d x_n) (\int \alpha_1(x_n) - a(x_n) \int \alpha) \\ &= (-1)^{n-1} \omega' \wedge d x_n (\int \alpha_1(x_n)) - (-1)^{n-1} \omega' \wedge a(x_n) d x_n (\int \alpha), \end{aligned}$$

de sorte que  $d \bar{I}_n(\alpha) = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha$ .

Soit maintenant une autre  $n$ -forme  $\omega$  à support compact dans  $\mathbf{R}_+^n$  et telle que  $\int \omega = 1$ ; on définit  $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega) \int \alpha$  et on a  $d I_n(\alpha) = \alpha - \omega \int \alpha$ .

2. Cas de  $\wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ . On définit  $I_0$  en convenant que  $I_0 = 0$ . Définissons  $\bar{I}_1$ . Soit  $\alpha = g(x) dx$  où  $g$  est à support dans  $\mathbf{R}_+^n$  et soit  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ , positive ou nulle, à support dans l'intervalle  $[1, 2]$  et telle que  $\int_0^\infty b(t) dt = 1$ .

On pose  $\bar{\omega} = b(x) dx$  et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x (g(t) - b(t) \int \alpha) dt.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha.$$

Pour  $n > 1$ , on définit  $\bar{I}_n$  par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1} \omega' \left\{ \int_{-\infty}^{x_n} \left( \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t) \int_{\mathbf{R}_+^n} \alpha \right) dt \right\}$$

où  $\omega' = b(x_1) b(x_2) \dots b(x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ .

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que  $d\bar{I}_n \alpha = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha$  et comme avant on remarque que l'on peut prendre  $\omega$  quelconque à support dans l'intérieur  $\mathbf{R}_+^n$  telle que  $\int \omega = 1$ , et construire  $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega) \int \alpha$ .

Montrons que si  $\alpha \in \wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$  alors  $I_n(\alpha)(x) = 0$  pour tout  $x \in \partial \mathbf{R}_+^n$ . Ceci est vrai pour  $n = 0, 1$ . Supposons le vrai pour  $(n-1)$ . La formule définissant  $I_n$  montre que

$$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n \text{ pour tout } x \in \partial \mathbf{R}_+^n, \text{ mais } I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0 \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

### 3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs  $u_t$  en posant

$$(*) \quad i(u_t) \tau_t + \alpha_t = 0,$$

$i(u_t) \tau_t$  étant le produit intérieur de  $\tau_t$  et  $u_t$ ; c'est la  $(n-1)$ -forme définie par

$$(i(u_t) \tau_t)(\xi_1 \dots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \dots \xi_{n-1}) \text{ pour } n-1 \text{ champs de vecteurs } \xi_1, \dots, \xi_{n-1}.$$

Comme  $\alpha_t|_{\partial M} = 0$  et  $\tau_t \neq 0$ , on a  $u_t|_{\partial M} = 0$  et l'équation  $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t$ .  $\Phi_t$  admet une solution  $\Phi_t$  telle que  $\Phi_0 = \text{id}$ ;  $\Phi_t|_{\partial M} = \text{id}$ .

$$\text{On a: } \frac{d}{dt} (\Phi_t^* \tau_t) = \Phi_t^* \left( \frac{\partial \tau_t}{\partial t} + d[i(u_t)\tau_t] \right) = 0$$

par la condition (ii) et l'équation (\*) (voir Sternberg [2] et Moser [1].)

(iii) implique (i) trivialement.

(i) implique (ii). Soit  $(U_i)_{i=0 \dots m}$  le recouvrement du lemme 1,  $\varphi_i$  les cartes correspondantes;  $(\lambda_i)$  une partition de l'unité subordonnée à  $(U_i)$ . Posons  $\beta_i^t = (\varphi_i^{-1})^* (\lambda_i \dot{\tau}_t)$  avec  $\dot{\tau}_t = \partial \tau_t / \partial t$ ; c'est une  $n$ -forme à support compact dans  $\mathbf{R}^n$  ou  $\mathbf{R}_+^n$ .

Soit  $\omega$  une  $n$ -forme à support compact dans  $\mathbf{R}_+^n \subset \mathbf{R}^n$  telle que  $\int \omega = 1$  et dont le support soit contenu dans l'intérieur de  $\mathbf{R}_+^n$ .

Alors  $\omega_i = (\varphi_i^{-1})^* (\varphi_o^* \omega)$  a un support qui ne rencontre pas  $\partial \mathbf{R}_+^n$  et  $\int \omega_i = 1$ .

D'après le lemme 2, on a

$$d I_n^i \beta_i^t = \beta_i^t - \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } \varphi_i(U_i) \subset \mathbf{R}^n$$

où  $I_n^i$  est l'opérateur du lemme 2 construit à partir de  $\omega_i$ . Donc

$$\begin{aligned} \varphi_i^* d I_n^i \beta_i^t &= \varphi_i^* \beta_i^t - \varphi_i^* \omega_i \int \beta_i^t \text{ dans } U_i, \\ d(\varphi_i^* I_n^i \beta_i^t) &= \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \beta_i^t \text{ où } \bar{\omega} = \varphi_o^* \omega; \end{aligned}$$

on pose  $\alpha_i^t = \varphi_i^* (I_n^i \beta_i^t)$  et  $\alpha_t = \sum_i \alpha_i^t$ ;

on a  $d \alpha_t = \sum_i \lambda_i \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \sum_i \int \beta_i^t = \dot{\tau}_t - \bar{\omega} \int \dot{\tau}_t = \dot{\tau}_t$

par la condition (i).

Comme le support de  $\omega_i$  ne rencontre pas  $\partial \mathbf{R}_+^n$ , d'après le lemme 2, on a  $(I_n^i \beta_i^t) | \partial \mathbf{R}_+^n = 0$ , donc  $\alpha_i^t$  et par conséquent  $\alpha^t$  s'annule sur  $\partial M$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MOSER, J. On volume elements on a manifold, *AMS. Trans.* 120 (1965), pp. 280-296.
- [2] STERNBERG, S. *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall — Englewood Cliffs, N. J. (1964).
- [3] DE RHAM, G. Forme differenziali et loro-integrali, *C.I.H.E. 2<sup>e</sup> ciclo, Saltino di Val-lombrosa, Agosto 1960, Roma*, p. 21.
- [4] PALAIS, R. Local triviality of the restriction map for imbeddings, *Comm. Math. Helv.* 34 (1960), pp. 305-312.

(Reçu le 24 juin 1973)

**Vide-leer-empty**