# 4. GÉNÉRALITÉS SUR LE PROBLÈME DE WARING

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

COROLLAIRE. *Toute suite de densité de Schnirelman strictement positive est une base.*

En effet, l'inégalité de Schnirelman peut s'écrire

$$\left(1-d(A+B)\right) \leqslant \left(1-d(A)\right)\left(1-d(B)\right).$$

Il s'ensuit, en particulier, que $(1 - d(hA)) \leqslant (1 - d(A))^h \leqslant \frac{1}{2}$ si $d(A) > 0$ et $h \geqslant h_0$. Et le lemme précédent entraîne immédiatement que $2h_0 A = \mathbf{N}$.

Schnirelman a ainsi prouvé que la suite $P = \{1\} \cup \{\text{nombres premiers}\}$ était une base en démontrant par une méthode de crible que $d(2P) > 0$.

THÉORÈME (Mann, 1942). $d(A+B) \geqslant \min(d(A) + d(B),\ 1)$.

La démonstration de ce théorème est assez ardue et il faut ajouter qu'il représente en un sens le meilleur résultat possible. Si l'on a par exemple ($k$ étant un entier $\geqslant 2$)

$$A = B = (1, k+1, 2k+1, \ldots),$$

alors

$$A + B = (1, 2, k+1, k+2, 2k+1, 2k+2, \ldots),$$

cependant que l'on a $d(A) = d(B) = \dfrac{1}{k}$ et $d(A+B) = \dfrac{2}{k} = d(A) + d(B)$.

## 4. Généralités sur le problème de Waring

Nous en avons déjà vu l'énoncé: pour $k = 2, 3, 4, \ldots$, la suite des puissances $k$-ièmes est-elle une base ? La réponse est affirmative, comme nous le verrons, et l'on désigne traditionnellement par $g(k)$ l'ordre de cette base. Pour les premières valeurs de $k$, l'évidence empirique conduit à conjecturer les valeurs suivantes:

$$g(2) = 4, \quad g(3) = 9, \quad g(4) = 19.$$

En exceptant le théorème des 4 carrés de Lagrange, la première démonstration d'existence, dans le cas particulier des bicarrés, est due à Liouville, en 1859, avec la majoration $g(4) \leqslant 53$. Sa démonstration, que nous donnerons au paragraphe 6, utilise conjointement le théorème des 4 carrés et une identité algébrique.

Puis on s'apercevra assez vite que, moyennant une identité algébrique « convenable » (que l'on découvrira effectivement pour les petites valeurs de $k$), l'existence de $g(k)$ entraîne celle de $g(2k)$, avec une majoration du style $g(2k) \leqslant a_k g(k) + b_k$.

Par contre, les valeurs impaires de $k$ posent des problèmes délicats, car les identités ont alors une tendance fâcheuse à fournir des sommes de puissances $k$-ièmes dont certaines sont négatives ! Enfin Maillet réussit, en 1895, à démontrer l'existence dans le cas des cubes, et donne la majoration $g(3) \leqslant 21$.

De nouveaux cas sont résolus, les majorations sont petit à petit améliorées, puis Hilbert, en 1909, démontre le théorème général d'existence de $g(k)$. Le théorème de Hilbert ne donnant aucune majoration explicite, la course aux majorations continue donc, et continue toujours... mais surtout pour une autre constante dont nous allons parler maintenant.

En 1909 également, Wieferich prouve que $g(3) = 9$, cependant que Landau montre qu'il existe $N_0$ tel que tout entier supérieur à $N_0$ soit somme d'au plus 8 cubes. En d'autres termes, la valeur de $g(3)$ dépend d'un nombre fini d'entiers — en fait 23 et 239 — qui sont seuls à exiger 9 cubes, et ne reflète nullement les propriétés « à l'infini ». Plus généralement on est amené à définir $G(k)$ le minimum de $p$, tel que tout entier suffisamment grand soit somme d'au plus $p$ puissances $k$-ièmes. On trivialement $G(k) \leqslant g(k)$ et il est en outre bien clair que l'existence de l'une quelconque des deux constantes entraîne celle de l'autre. La disproportion entre les deux constantes est énorme: on sait actuellement que $g(k)$ est équivalent à $2^k$, tandis que l'on dispose pour $G(k)$ de majorations de l'ordre de $k \operatorname{Log} k$.

Nous nous occuperons dans la suite de cet article de méthodes élémentaires tournant autour des identités algébriques. Il importe néanmoins de signaler que Hardy et Littlewood en 1920, puis Vinogradov en 1924, ont introduit des méthodes analytiques extrêmement puissantes qui permettent d'obtenir des résultats numériques remarquables. Et notons enfin que Linnik a donné, en 1943, une démonstration du théorème de Hilbert par la méthode de Schnirelman; mais les majorations explicites qu'il obtient sont catastrophiques.