ANNEAUX DE FATOU

ANNEAUX DE FATOU

par Jean-Luc CHABERT

1. HISTORIQUE

Fatou [6] a donné une propriété de l'anneau **Z** des entiers rationnels, résultat repris par Polya [9] et connu sous le nom de:

1.1 LEMME DE FATOU. *Soient $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes à coefficients entiers rationnels tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul. Si les coefficients a_n du développement en série à l'origine de la fraction $P(X)/Q(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ sont des entiers, alors $Q(o) = 1$.*

Mais cette propriété de **Z** est encore vraie pour d'autres anneaux. Ainsi Pisot [8] l'a démontrée pour les anneaux d'entiers d'un corps de nombres:

1.2. PROPOSITION. *Soit a_n le terme général d'une suite d'entiers d'un corps de nombres K. Supposons qu'il existe entre les éléments a_n une relation de récurrence d'ordre s:*

$$a_{n+s} + q_1 a_{n+s-1} + \dots + q_s a_n = o \tag{1.2.1}$$

et qu'il n'en existe aucune d'ordre $s - 1$. Alors $q_1, q_2, \dots, q_s$ sont des entiers de K.

C'est bien une généralisation du lemme de Fatou, car:

1.3. Etant donné un corps K, pour que la série $\Sigma a_n X^n$ où les a_n sont des éléments de K représente une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ il faut et il suffit que, pour n assez grand, les éléments a_n vérifient une relation de récurrence de la forme (1.2.1) ([2], Algèbre, IV, § 5, exercice 3). Lorsque ceci est réalisé et que l'ordre s de la relation est le plus petit possible, il existe une représentation de la fraction rationnelle correspondante avec des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ étrangers entre eux et

$$Q(X) = 1 + q_1 X + \dots + q_s X^s.$$

Si de plus le degré de P est strictement inférieur à celui de Q, alors la récurrence (1.2.1) commence à $n = o$.

1.4. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K, la propriété (i) ci-dessous implique la propriété (ii):

(i) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que $\deg(P) < \deg(Q)$ et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $A[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ sont dans A, alors $Q(o)$ est inversible dans A.

Notons en outre que Dress [5] a étendu à son tour la propriété (i) en question aux anneaux factoriels.

Ce qui précède conduit à donner les définitions suivantes:

1.5. Etant donné un corps K, une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ à coefficients dans K est dite normalisée si (i) P et Q sont étrangers entre eux (ii) $\deg(P) < \deg(Q)$ (iii) $Q(o) = 1$.

1.6. Définition (Benzaghou [1]). *Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

(i) Pout toute fraction rationnelle normalisée $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ si les coefficients de son développement en série à l'origine sont dans A, alors les coefficients de $Q(X)$ sont eux aussi dans A.

(ii) Si une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A vérifie une relation de récurrence du type (1.2.1), où les coefficients q_k appartiennent à K et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A.

2. Situation récente

2.1. *Un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 *est un anneau de Fatou* [1].

Cette assertion donne en particulier tous les cas d'anneaux de Fatou envisagés au paragraphe 1.

2.2. *Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos* [1].

2.3. *Rappel.* Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit complètement intégralement clos si: $x \in K$, $d \in A - \{o\}$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $dx^n \in A$ implique $x \in A$.

(Pour montrer l'assertion 2.2 il suffit d'appliquer la définition 1.6. (i) à la fraction rationnelle $\dfrac{d}{1 - xX}$.)

Ces deux résultats font poser la question: la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [1] ? A ce propos on notera que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 (cf. exemple de Nakayama [7], cf. aussi [2], Algèbre commutative, VI, § 4, exercice 6).

2.4. *La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur* 1 [4].

2.5. *La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale* [1] *et aux anneaux de polynômes* [3], *mais ne passe pas aux localisés* [4] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).

3. Un anneau est de Fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos

Etant donné l'assertion 2.2., il reste à montrer que la condition est suffisante. Soit donc A un anneau complètement intégralement clos de corps des fractions K et soit $P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle normalisée de $K(X)$ dont le développement en série à l'origine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ est à coefficients dans A. Il s'agit de montrer que $Q(X)$ appartient à A $[X]$.

Comme $Q(o) = 1$, $Q(X)$ est égal au produit $\prod_{0 \leq i \leq q} (1 - \alpha_i X)$ où q est le degré de $Q(X)$ et où les α_i sont les inverses des racines de $Q(X)$ dans un corps de décomposition. Pour que les coefficients de $Q(X)$ soient dans A il faut et il suffit que les α_i soient entiers sur A. Comme la fermeture intégrale dans une extension de corps d'un anneau complètement intégralement clos est aussi un anneau complètement intégralement clos ([2], Algèbre commutative, V, § 1, exercice 14), on peut supposer que les racines de $Q(X)$ sont dans K et il s'agit de montrer que leurs inverses sont dans A. Soit donc $\alpha \in K$ tel que $Q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = o$. Soit $d \in A - \{o\}$ tel que $R(X) = d \,.\, Q(X)/(1-\alpha X)$ soit dans $A[X]$ et considérons le développement en série $\Sigma b_n X^n$ de la fraction rationnelle $d \,.\, P(X)/(1-\alpha X) = R(X) \,.\, (P(X)/Q(X))$. Les b_n vérifient la relation de récurrence:

$$b_{n+1} = \alpha \,.\, b_n \text{ (pour } n \geqq q\text{) et donc:}$$

$$b_{n+q} = \alpha^n \,.\, b_q \text{ (pour } n \geqq o\text{).}$$

En outre b_q ne peut être nul, sinon tous les b_{q+n} seraient nuls, $P(X)/(1-\alpha X)$ serait un polynôme, $\frac{1}{\alpha}$ serait racine de $P(X)$ et la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ ne serait pas normalisée.

D'autre part, l'égalité:

$(\Sigma a_n X^n) \,.\, R(X) = \Sigma b_n X^n$ montre que, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} est combinaison des a_m et des coefficients de $R(X)$ qui sont dans A, les uns par hypothèse, les autres par construction. Ainsi, pour $n \geqslant o$, b_{q+n} c'est-à-dire $\alpha^n \,.\, b_q$ appartient à A et, A étant complètement intégralement clos, α appartient à A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Benzaghou, B. Algèbres de Hadamard, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, pp. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).

[2] Bourbaki, N. Eléments de mathématique. Paris, Hermann (*Act. scient. et ind.*).

[3] Cahen, P.-J. Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 94, 1970, pp. 81-83.

[4] Chabert, J.-L. Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 273-283.

[5] Dress, Fr. Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, pp. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

[6] Fatou, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta. Math.*, Uppsala, t. 30, 1906, pp. 335-400 (Thèse Sc. math. Paris, 1907).

[7] Nakayama, T. On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, *Proc. Imp. Acad.* Tokyo, t. 18, 1942, pp. 185-187 et pp. 233-236, et, *Proc. Japan Acad.*, t. 22, 1946, pp. 249-250.

[8] Pisot, Ch. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).

[9] Polya, G. Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Ann.*, t. 77, 1916, pp. 497-513.

(Reçu le 24 février 1972).

Jean-Luc Chabert
10, Villa des Gobelins
75-Paris 13e