Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 18 (1972)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉTUDE ARITHMÉTIQUE DES CORPS CYCLIQUES DE DEGRE p'
SUR LE CORPS DES NOMBRES RATIONNELS
Autor: Oriat, Bernard
Kapitel: II.5. Discriminant de $\mathbb{K}_r$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45361>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

est p^r (lemme I.2), on a donc:

$$f_q = \frac{p^r}{\text{PGCD}(p^r, V(q))}$$

et

$$g_q = \text{PGCD}(p^r, V(q)).$$

II.4. INDICE DE RAMIFICATION DANS UNE EXTENSION K_r .

PROPOSITION II.2.

Soient K_r une extension cyclique de degré p^r sur Q et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée à K_r . Pour tout i de 1 à r et tout j tel que $m_{i-1} < j \leq m_i$, l'indice de ramification de p_j dans K_r est p^{r-i+1} .

Si $u_r \neq 0$, l'indice de ramification de p dans K_r est p^{r-l+1} .

Soit j tel que $m_{i-1} < j \leq m_i$. p_j divise donc n_i et ne divise pas n_{i-1} . C'est-à-dire que p_j se ramifie dans $\Omega(n_i)$ et ne se ramifie pas dans $\Omega(n_{i-1})$. D'après le lemme II.1, ceci implique que p_j se ramifie dans K_i et ne se ramifie pas dans K_{i-1} . K_{i-1} est donc le corps d'inertie de p_j dans K_r et l'indice de ramification de p_j dans K_r est égal à: $[K_r : K_{i-1}]$.

De même si $u_r \neq 0$, K_{l-1} est le corps d'inertie de p dans K_r .

II.5. DISCRIMINANT DE K_r .

PROPOSITION II.3.

K_r est une extension cyclique de degré p^r sur Q et $(\Omega(n_i))_{1 \leq i \leq r}$ la suite de corps cyclotomiques associée. Le discriminant de K_r sur Q est:

— Dans le cas où $u_r = 0$:

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{m_{i-1} < j \leq m_i} p_j^{p^{i-1}(p^{r-i+1}-1)}$$

— Dans le cas où p est impair et $u_r \geq 2$:

$$p^{p^{l-1} \left((r-l+2)p^{r-l+1} - \frac{p^{r-l+1}-1}{p-1} - 1 \right)} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{m_{i-1} < j \leq m_i} p_j^{p^{i-1}(p^{r-i+1}-1)}$$

— Dans le cas où $p = 2$ et $u_r = 2$:

$$2^{2^r} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{m_{i-1} < j \leq m_i} p_j^{2^{i-1}(2^{r-i+1}-1)}$$

— Dans le cas où $p = 2$ et $u_r \geq 3$:

$$2^{2^{l-1}((r-l+2)2^{r-l+1}-1)} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{m_{i-1} < j \leq m_i} p_j^{2^{i-1}(2^{r-i+1}-1)}$$

Supposons tout d'abord $u_r = 0$. Désignons par A l'anneau des entiers de K_r . Pour tout j de 1 à m_r soit $p_j A = \prod_{1 \leq v \leq g_j} p_{jv}^{e_j}$ la décomposition de $p_j A$ dans K_r et soit f_j le degré résiduel de p_j dans K_r . Les p_j étant les seuls nombres premiers ramifiés dans K_r et leurs indices de ramification e_j étant premiers à p_j , la différentielle δ de K_r sur Q est:

$$\delta = \prod_{1 \leq j \leq m_r} \prod_{1 \leq v \leq g_j} p_{jv}^{e_j-1}$$

Le déterminant D_f , de K_r sur Q , est donc $D = N_{K_r/Q}(\delta)$ et comme $N_{K_r/Q}(p_{jv}) = p_j^{f_j}$ on obtient:

$$D = \prod_{1 \leq j \leq m_r} p_j^{f_j g_j (e_j - 1)}$$

qui s'écrit également:

$$D = \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{m_{i-1} < j \leq m_i} p_j^{f_j g_j (e_j - 1)}.$$

Si $m_{i-1} < j \leq m_i$, alors $e_j = p^{r-i+1}$ d'après la proposition II.2 et comme $e_j f_j g_j = p^r$, on obtient le résultat annoncé.

Supposons maintenant p impair et $u_r \geq 2$.

Dans ce cas u_r et l sont liés par la relation $u_r = r - l + 2$. On notera toujours D le discriminant de K_r sur Q et on introduit la décomposition $\delta = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{m_r}$ de la différentielle de K_r sur Q , en idéaux: $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m_r}$, tels que $D_0 = N_{K_r/Q}(\delta_0)$ soit une puissance de p et tels que $D_j = N_{K_r/Q}(\delta_j)$ soit une puissance de p_j . D s'écrira alors $D = D_0 D_1 \dots D_{m_r}$. Le calcul de $D_1 D_2 \dots D_{m_r}$ s'effectue comme dans la démonstration précédente. Pour calculer D_0 , on introduit la différentielle δ' de $\Omega(n_r)$ sur K_r décomposée de la même façon en $\delta' = \delta'_0 \delta'_1 \dots \delta'_{m_r}$ et $D'' = D''_0 D''_1 \dots D''_{m_r}$ le discriminant de $\Omega(n_r)$ sur Q .

La formule de transitivité sur les différentielles donne:

$$D''_0 = N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta_0 \delta'_0) = N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta'_0) N_{K_r/Q}(\delta_0^{[\Omega(n_r):K_r]})$$

d'où
$$D''_0 = N_{\Omega(n_r)/\mathcal{Q}}(\delta'_0) D_0 \frac{\varphi(n_r)}{p^r}$$

Calcul de $N_{\Omega(n_r)/\mathcal{Q}}(\delta'_0)$:

Soient A et A_Ω les anneaux d'entiers respectifs de K_r et $\Omega(n_r)$ et soit $pA = \prod_{1 \leq v \leq g} p_v^e$ la décomposition de pA dans K_r , et f le degré résiduel de p dans K_r . Soient:

$p_v A_\Omega = \prod_{1 \leq v' \leq g'} p_{vv'}^{e'}$, la décomposition de $p_v A_\Omega$ dans $\Omega(n_r)$ et f' le degré résiduel de p_v dans $\Omega(n_r)$. L'indice de ramification e de p dans K_r est p^{r-l+1} (proposition II.2) et puisque l'indice de ramification ee' de p dans $\Omega(n_r)$ est $\varphi(p^{u_r}) = (p-1)p^{r-l+1}$, on a donc $e' = p-1$ et e' est premier à p . On en déduit que:

$$\delta'_0 = \prod_{\substack{1 \leq v \leq g \\ 1 \leq v' \leq g'}} p_{vv'}^{p-2}$$

et comme $N_{\Omega(n_r)/\mathcal{Q}}(p_{vv'}) = p^{ff'}$, on aura donc:

$$N_{\Omega(n_r)/\mathcal{Q}}(\delta'_0) = p^{ff'gg'(p-2)} = p^{\frac{(p-2)\varphi(n_r)}{(p-1)p^{r-l+1}}}$$

D'autre part on a $D''_0 = p^{\varphi(n_r)} \left(r-l+2 - \frac{1}{p-1} \right)$ d'où l'égalité:

$$p^{\varphi(n_r)} \left(r-l+2 - \frac{1}{p-1} \right) = p^{\frac{(p-2)\varphi(n_r)}{(p-1)p^{r-l+1}}} D_0 \frac{\varphi(n_r)}{p^r}$$

dont on extrait la valeur de D_0 .

Dans le cas $p = 2$ et $u_r = 2$; gardant les mêmes notations on a $e' = 1$ et $\delta'_0 = 1$. On utilise alors comme précédemment la valeur $D''_0 = 2^{\varphi(n_r)}$.

Supposons maintenant $p = 2$ et $u_r \geq 3$:

On garde les mêmes notations que précédemment. On a cette fois: $u_r = r - l + 3$ et l'indice de ramification ee' de 2 dans $\Omega(n_r)$ est maintenant 2^{r-l+2} d'où $e' = 2$. δ'_0 ne peut donc être obtenue comme précédemment. On introduit un corps E compris entre K_r et $\Omega(n_r)$ de la façon suivante: reprenant les notations introduites dans la proposition I.3 bis posons:

$$h = a_0' \frac{\alpha_0}{2^{l-1}} a_0 \quad \text{et} \quad S = \{h, 1\}.$$

h est d'ordre 2, S est donc un sous-groupe de $G(n_r)$. Dans le cas où $l = 1$, c'est-à-dire $u_r = r + 2$, il apparaît immédiatement que S est inclus dans S_r . Si $l \geq 2$, c'est-à-dire si $3 \leq u_r \leq r + 1$ on constate que:

$\left(\frac{\alpha'_0}{2^{l-1}} + 1\right) \alpha_0 \equiv 0 (2^r)$ et qu'il existe donc un entier β tel que:

$$\left(\frac{\alpha'_0}{2^{l-1}} + 1\right) \alpha_0 + 2^r \beta = p_1 - 1.$$

D'où

$$h = (c_1^{\alpha'_0} a'_0)^{\frac{\alpha_0}{2^{l-1}}} c_1^{\alpha_0} a_0 c_1^{2^r \beta}$$

qui montre que S est inclus dans S_r . E désigne le corps fixe de S , E contient donc K_r .

Le groupe d'inertie de 2 dans $\Omega(n_r)$ est $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$, le groupe d'inertie de $\mathfrak{p}_{vv}$ sur E sera donc $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right) \cap S = S$. $\mathfrak{p}_v$ n'est donc pas ramifié dans E et la différente de E sur K_r est première avec 2.

Si D' est le discriminant de E sur Q , et D'_0 la plus grande puissance de 2 divisant D' , on aura alors:

$$D'_0 = N_{E/Q}(\delta_0) = N_{E/K_r}(D_0) = D_0^{\frac{\varphi(n_r)}{2^{r+1}}}$$

Il reste à calculer D'_0 . Pour cela introduisons A_E l'anneau des entiers de E et ξ une racine primitive $(n_r)^{\text{eme}}$ de 1. A partir de l'égalité: $\xi^2 = -\xi^{h+1} + (\xi + \xi^h) \xi$, on constate par récurrence sur t que ξ^t peut toujours se mettre sous la forme $a + b\xi$, avec a et b dans A_E . Comme $\{1, \xi, \dots, \xi^{\varphi(n_r)-1}\}$ est une base des entiers de $\Omega(n_r)$ sur Z , on en déduit que $\{1, \xi\}$ est une base des entiers de $\Omega(n_r)$ sur A_E . Le polynome $X^2 - (\xi + \xi^h) X + \xi^{h+1}$ est le polynome minimal de ξ sur E et la différente δ'' de $\Omega(n_r)$ sur E sera donc l'idéal engendré par $\xi - \xi^h$.

La formule de transitivité sur les différentes appliquée entre Q , E et $\Omega(n_r)$ va donner:

$$D'' = D'^{[\Omega(n_r):E]} N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta'') = D'^2 N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta'')$$

Pour obtenir la valeur de $N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta'')$, montrons que ξ^{h-1} est une racine primitive $(2^{r-l+2})^{\text{eme}}$ de 1. En effet:

$h \in T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ donc $h - 1 \equiv 0 \left(\frac{n_r}{2^{u_r}}\right)$ et d'autre part, h étant premier à 2, on a $h - 1 \equiv 0 (2)$.

Mais $h - 1 \not\equiv 0 \pmod{4}$, sinon h appartiendrait à $T\left(n_r, \frac{n_r}{2^{u_{r-2}}}\right)$ et ce sous-groupe est engendré par a'_0 .

On a donc finalement

$$h - 1 \equiv 0 \pmod{\left(\frac{n_r}{2^{r-l+2}}\right)} \quad \text{et} \quad h - 1 \not\equiv 0 \pmod{\left(\frac{n_r}{2^{r-l+1}}\right)}$$

On en déduit que

$$N_{\Omega(2^{r-l+2})/Q}(1 - \xi^{h-1}) = 2$$

et

$$N_{\Omega(n_r)/Q}(\delta'') = 2^{\frac{\varphi(n_r)}{2^{r-l+1}}}.$$

Comme D_0'' est égal à $2^{\varphi(n_r)(r-l+2)}$, on en déduit les égalités:

$$2^{\varphi(n_r)(r-l+2)} = D_0'^2 \cdot 2^{\frac{\varphi(n_r)}{2^{r-l+1}}} = D_0 \frac{\varphi(n_r)}{2^r} \cdot 2^{\frac{\varphi(n_r)}{2^{r-l+1}}}$$

D'où l'on déduit la valeur de D_0 .

PROPOSITION II.4.

Le discriminant de K_r , extension cyclique de degré p^r sur Q , ne dépend que de la suite de corps cyclotomiques associée à K_r . Réciproquement, si deux extensions cycliques de degré p_r sur Q , ont même discriminant sur Q , alors leurs suites de corps cyclotomiques sont égales.

C'est une conséquence de la proposition II.3.

Précisons pour la réciproque, que si K_r est une extension cyclique de degré p^r sur Q (p premier, par exemple) et si l'on connaît son discriminant D sur Q , alors les nombres premiers divisant n_r sont exactement ceux qui divisent D . L'exposant de p_j dans la décomposition de D en facteurs premiers n'est pas divisible par p^i si et seulement si $j \leq m_i$ c'est-à-dire si et seulement si p_j divise n_i . Ceci permet de préciser quels sont les diviseurs de n_i distincts de p . Si p ne divise pas D , on a $u_r = 0$ et alors tous les u_i sont nuls. Si p divise D , et comme $(r-l+2)p^{r-l+1} - \frac{p^{r-l+1} - 1}{p-1} - 1$ est premier à p , on obtient, à partir de la valeur de l'exposant de p dans la décomposition de D , la valeur de l , donc la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq r}$.