

§3. Une formule d'homotopie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On a alors une écriture intéressante de $D_q(f^*)$.

$$D_q(f^*) [X_1, \dots, X_{2n-1}] \\ = \sum_{I, J} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_{2n-1} \\ 2 \leq v \leq q \\ q+1 \leq v \leq n}} \varepsilon_{\sigma} \frac{f_1^* [X_{\sigma(1)}]}{f_1^* [x-y]} \prod_{v=1}^n \bar{\partial}_{\xi_v} \left[\frac{f_v^* [X_{\sigma(2v+1)}]}{f_v^* [x-y]} \right] (X_{\sigma(2v)}) .$$

La sommation pour I, J fixés est une forme n -C-linéaire alternée de $X_{k_1}, \dots, X_{k_n}$; elle est donc parfaitement déterminée par sa valeur sur une base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle on va choisir $X_{k_1} = [x-y]$. On peut le faire car ce vecteur se comporte comme un vecteur constant vis-à-vis de $\bar{\partial}_x$ et $\bar{\partial}_y$. Si $\sigma_{(1)} \neq k_1 \exists v$ avec $X_{\sigma(2v+1)} = X_{k_1} = [x-y]$ pour ce v on a

$$\bar{\partial}_{\xi_v} \left[\frac{f_v^* [X_{\sigma(2v+1)}]}{f_v^* [x-y]} \right] = 0 .$$

Les seuls termes restants sont des termes avec $\sigma(1) = k_1$ et on a la simplification

$$\frac{f_1^* [x-y]}{f_1^* [x-y]} = 1 .$$

Le théorème est démontré.

§ 3. UNE FORMULE D'HOMOTOPIE

Nous allons utiliser le théorème 1 pour rechercher la connexion entre différentes C.F. formes. Nous entrevoyons ensuite les cas particuliers importants pour la suite.

1. Soit toujours W un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Définition 2. Pour $1 \leq v \leq r$, soit $f_v^* \in \mathcal{C}_{(p_v, q_v; r_v, s_v)}^{k_v}(W)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$.

$$D_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(f_1^*, \dots, f_r^*) = \left(\bigwedge^{\alpha_1} f_1^* \right) \wedge \dots \wedge \left(\bigwedge^{\alpha_r} f_r^* \right) .$$

Définition 3. Soit $f^* \in \mathcal{C}_{(1, 0; 0, 0)}^2(W)$ avec $f(x, y) = f^*(x, y) [x-y]$ ne s'annule pas sur W .

$$D_{q+1}(f^*) = D_{1, q, r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{f^*}{f} \right) .$$

C'est exactement la définition 1 dans le cas où toutes les formes f_v^* sont égales.

$$\text{Remarque.} \quad D_{q+1}(f^*) = D_{1,q,r} \left(\frac{f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}, \frac{\bar{\partial}_x f^*}{f} \right)$$

$$\text{car} \quad \bar{\partial}_y \frac{f^*}{f} = \bar{\partial}_y \left(\frac{1}{f} \right) \wedge f^* + \frac{\bar{\partial}_y f^*}{f}$$

et le premier terme disparaît dans le produit extérieur avec f^* .

Soit maintenant $g^* \in \mathcal{C}_{(1,0;0,0)}^2(W)$ vérifiant de plus $\bar{\partial}_y g^* = 0$.

On définit comme pour f^* , $g(x, y) = g^*(x, y) [x - y]$ supposée non nulle en tout point de W et $D_{q+1}(g^*)$; dès que $q > 0$ on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$.

Lemme 3.1. Soit $q + r \geq 1$, $q + r + s + 1 = n$. Alors

$$\begin{aligned} & D_{1,q,r,s} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &= \frac{q}{r+q} \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &- \frac{r}{r+q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &+ \frac{r}{r+q} D_{1,q,r-1,s+1} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous supposons tout d'abord $q \geq 1$ et $r \geq 1$ et abrégeons les notations par $F^* = f^* / f$ et $G^* = g^* / g$.

D'après le théorème 1

$$D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons la forme

$$\bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons-la de nouveau après l'avoir différenciée conformément au § 1 (3.3 et 4.3)

$$\begin{aligned}
 D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) &= D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \{ D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ \dots \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,r-1,1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

D'après le § 1.3.3 c'est aussi

$$\begin{aligned}
 D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ (-1)^q p D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

Au membre de droite de cette égalité ajoutons maintenant

$$- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*)$$

et soustrayons cette forme après l'avoir différenciée

$$\begin{aligned}
 &\bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= D_{1,1,q,r-1,s}(\bar{\partial}_x G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &+ D_{1,1,1,q-1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \dots \\
 &+ \dots \\
 &+ (-1)^{q-1} D_{1,1,q-1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

En utilisant encore le § 1.3.3 il vient

$$\begin{aligned}
 D_{1,q,r,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &= \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,r,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} \bar{\partial}_x D_{1,1,q,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} D_{1,q,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\
 &- \frac{r}{q} D_{1,q,r,s}(G^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) \}.
 \end{aligned}$$

En appliquant encore le théorème 1 au dernier terme du second membre et en le faisant passer au premier membre on obtient exactement le lemme 3.1

Si $q = 0$ et $r \geq 1$ le lemme devient

$$D_{1,r,s}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_x G^*) \\ + D_{1,r-1,s+1}(F^*, \bar{\partial}_x F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Si $q \geq 0$ et $r = 0$ le lemme devient

$$D_{1,q,s}(F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*) = \bar{\partial}_y D_{1,1,q-1,s}(G^*, F^*, \bar{\partial}_y F^*, \bar{\partial}_x G^*).$$

Dans les deux cas, la différentiation du premier terme du second membre par le § 1.4.3 puis l'application du § 1.3.3 donnent immédiatement le résultat.

2. Nous appliquons maintenant le lemme dans le cas $q = 0$ et $r = n - 1$:

$$D_1(f^*) = D_{1,r}(f^*/f, \bar{\partial}_x(f^*/f)) \text{ (par définition).}$$

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ + D_{1,r-1,1}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

On recommence sur le deuxième terme du second membre:

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) \\ - \bar{\partial}_x D_{1,1,r-2,1}\left(\left(\frac{g^*}{g}, \left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)\right) \\ + D_{1,r-2,2}\left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right).$$

Après avoir répété r fois l'opération

$$D_1(f^*) = -\bar{\partial}_x D_{1,1,r-1}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right)\right) - \dots \\ - \bar{\partial}_x D_{1,1,1,r-2}\left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x\left(\frac{f^*}{f}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{g^*}{g}\right)\right)$$

$$- \bar{\partial}_x D_{1,1,r-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ + D_{1,r} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \frac{g^*}{g} \right).$$

Une nouvelle application du théorème 1 au dernier terme de cette somme donne immédiatement:

THÉORÈME 2. $D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*),$

où $A(f^*, g^*)$ est la double forme

$$A(f^*, g^*) = - \sum_{k=1}^r D_{1,1,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right).$$

Par application du lemme 3.1 pour $q \geq 1$ on obtient une relation similaire si on remarque que $D_{q+1}(g^*) = 0$. C'est:

THÉORÈME 3.

Pour $q \geq 1$ et $q + r + 1 = n$ il existe des formes doubles $A(f^*, g^*)$ et $C(f^*, g^*)$ sur W telles que:

$$D_{q-1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{où}$$

$$A(f^*, g^*) = \sum_{k=1}^r a_k D_{1,1,q,r-k,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

$$C(f^*, g^*) =$$

$$\sum_{k=1}^{r+1} c_k D_{1,1,q-1,r-k+1,k-1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

avec a_k et c_k coefficients rationnels.

La démonstration est exactement calquée sur celle du théorème 2 mais on applique $(r+1)$ fois le lemme 3.1 (la dernière application donne seulement un terme en $\bar{\partial}_y$).