§5. Existence, propriétés des suites - équiréparties Image d'une suite -équirépartie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

telle que $\sup_{x \in X} \{ | g(x) - h(x) | \} \leq 1/4$. Soit a, b appartenant à D_p tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de M', $f^{-1}(]a, b[)$; c'est un ouvert contenant x et inclus dans U.

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}'$ est suffisante pour la mesure μ. Désignons par $\mathfrak{M}$, la famille des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathscr{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathscr{R}'^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si M appartenant à $\mathscr{G}$, $M = \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[)$, M est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathscr{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[) .$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[) ,$$

appartient à $\mathfrak{M}^{oo}$.

Comme $\mathfrak{M}^{oo}$ est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathfrak{M}^{oo}$. On en déduit

$$\mathscr{F}^{oo} = \mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo} . \tag{2}$$

Le fait que $\mathfrak{M}'$ est une famille suffisant pour la mesure μ, est une conséquence de (1) et (2).

§ 5. Existence, propriétés des suites μ-équiréparties Image d'une suite μ-équirépartie

5.1. *Démonstration du Théorème C*

Image d'une suite μ-équirépartie

Il est clair, puisque X^J est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathscr{B}(X^J, \mathbf{R})$ que pour $\mu_o^{\mathbf{N}}$-presque tout x:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f) .$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons

$$a_i = a_i(x) = (P_J(\sigma^{ui}(x))) \quad et \quad v_n = v_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i).$$

1) Notre première étape va consister à majorer la mesure μ_o^{N} de l'application $x \to v_{n^2}(x)$. Il est clair que $\mu(v_n) = 0$; il est clair d'autre part que si $|p - q| \geqq \mathrm{Max}\{n_1 - n_2 : n_1, n_2 \in J\} = r$ les deux applications a_p et a_q de X^{N} dans X^J sont indépendantes. (Pour deux parties mesurables A_p et A_q de X^J on a alors $\mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_p) \cap a_p^{-1}(A_q)) = \mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_p))\,\mu^{\mathrm{N}}(a_p^{-1}(A_q)))$ et, par conséquent, $\mu^J(a_p . a_q) = \mu^J(a_p)\,\mu^J(a_q) = 0$.

On déduit de là, en posant $m = \mathrm{Max}\{|f(y)| : y \in X^J\}$:

$$\mu^{\mathrm{N}}\Big(\sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}} f(a_p)f(a_q)\Big) \leqq m^2 \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n \\ |p-q| \leq r}} 1 \leqq 2m^2 n .$$

On en déduit: $\mu^{\mathrm{N}}(v_{n^2}) \leqq 2m^2/n$.

2) Utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychef, nous obtenons une majoration de la mesure de l'ensemble:

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X^{\mathrm{N}} : |v_n(x)| \geqq \varepsilon\} : \mu^{\mathrm{N}}(A_n) \leqq \frac{2m^2}{\varepsilon^2}\, 1/n = 0(1/n)(n \to \infty).$$

3) On en déduit que la sous-suite $n \to v_{n^2}(x)$ converge vers 0 pour presque tout x. En effet, l'ensemble

$$\limsup_{n \to \infty}(A_n(\varepsilon)) = \{x : \limsup_{n = \infty} |v_{n^2}(x)| > \varepsilon\} = \bigcap_{s \in \mathrm{N}} \bigcup_{n^2 < s} A_{n^2}(\varepsilon)$$

a pour mesure 0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

4) Prouvons enfin que si v_{n^2} converge vers 0, la suite v_n converge vers 0. Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, l'entier r défini par: $r^2 \leqq n < (r+1)_2$, alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{r^2}{n} - \frac{1}{r^2}\left(\sum_{i=1}^{r^2} a_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{r^2}^{n} a_i \tag{1}$$

$\left|\sum_{r^2}^{n} a_i\right| \leqq m((r+1)^2 - r^2)$, et, par conséquent, $\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{r^2}^{n} a_i$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; $\frac{r^2}{\mathrm{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On déduit de (1) que si v_{n^2} tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, v_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5.2. *Démonstration du Théorème D*

Soit (X, μ) un espace mesure, X compact. Nous devons prouver que pour μ^{N}-presque tout point $x \in X^{\mathrm{N}}$, et pour toute partie S de X^{N} qui est μ^{N}-$\mathscr{R}$-intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \Pi(v; S, n)/n = \mu_o^{\mathrm{N}}(S), \tag{1}$$

la suite v étant définie par $v_n = \sigma^n(x)$.

Posons $J_p = \{1, 2, ..., p\}$. Il résulte du théorème 3.A que, pour tout p et pour μ_o^{N}-presque tout $x \in X^{\mathrm{N}}$ la suite $n \to P_{J_p}(\sigma^{u_n}(x))$ est μ^{J_p}-équirépartie dans X^{J_p}. Montrons que cette dernière assertion est équivalent à « $\sigma^{u_n}(x)$ μ^{N}-équirépartie dans X^{N} ».

Soit, en effet, (v_n) une suite de points de X^{N} telle que pour tout p, $P_{J_p}(v_n)$ est μ^{J_p}-équirépartie dans X^{J_p}; montrons tout d'abord que si K est un compact de X^{N} on a:

$$\limsup_{n\to\infty} \{\Pi(v; K, n)/n\} \leq \mu^{\mathrm{N}}(K). \tag{2}$$

Posons $F_k = P_{J_k}^{-1}(P_{J_k}(K))$; K étant fermé, il est l'intersection de F_k. Pour ε positif, on peut donc choisir k de telle sorte que

$$\mu^{\mathrm{N}}(F_k) \leq \mu^{\mathrm{N}}(k) + \varepsilon/2.$$

Par ailleurs $P_{J_k}(K)$ est fermé et puisque X^{J_k} est normal il existe un ensemble L, μ^{J_k}-$\mathscr{R}$-intégrable, qui le contient et tel que

$$\mu^{J_k}(L) \leq \mu^{J_k}(P_{J_k}(K)) + \varepsilon/2.$$

Si $M = P_{J_k}^{-1}(N)$, il est clair que M contient K, que $\mu^{\mathrm{N}}(M) \leq \mu(K) + \varepsilon$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \{\Pi(v; M; n)/n\} = \mu^{\mathrm{N}}(M).$$

La relation (2) s'en déduit.

Pour obtenir (1) pour une partie μ^{N}-$\mathscr{R}$-intégrable quelconque, il suffit d'utiliser la relation (2), d'une part pour l'adhérence de F. d'autre part pour le complémentaire de l'intérieur de F.

5.3. *Suites adjacentes — Fin de la démonstration du Théorème A*

Soit X un espace métrique (distance notée d). On dit que deux suites $u = (u_n)$, $v = (v_n)$ sont *adjacentes* si $d(u_n, v_n)$ tend vers la limite 0 quand n

tend vers l'infini. Dans un tel espace une fonction continue à support compact est uniformément continue. Et par conséquent:

Proposition F. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Si deux suites sont *adjacentes* pour une distance d dont la topologie est équivalente à celle de X, si *l'une est μ-équirépartie il en est de même de l'autre.*

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat: « Si X possède une base dénombrable, $\mathscr{C}^{oo} = \mathscr{R} = \mathscr{R}^{oo}$ », conséquence de la proposition B et de la proposition suivante.

Proposition G. — Si (X, μ) est un espace-mesure, alors

$$\mathscr{C}_c^{oo} \subset \mathscr{R} .$$

Démonstration. Montrons que si $f \in \mathscr{B}(X, \mathbf{R})$ n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable, alors f n'appartient pas à $\mathscr{C}_c^{oo}$.

Si f n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable, il existe un nombre positif a et une partie borelienne M de X de mesure positive, tels que pour tout $m \in M$

$$\limsup_{x \to m} f(x) - \liminf_{x \to m} f(x) > a .$$

Soit $u = (u_n)$ une suite de points de X qui est μ_o-équirépartie et telle que, si χ désigne la fonction caractéristique de M

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = \mu_o(\chi) = \mu_o(M) \tag{1}$$

(c'est dire que la « densité » des points de la suite qui appartiennent à M égale $\mu_o(M)$. Une telle suite existe; pour s'en rendre compte, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.A en « ajoutant » à la famille « suffisante » pour μ_o, dénombrable, la fonction χ.

Un espace localement compact à base dénombrable est métrisable. Soit d une métrique dont la topologie est équivalente à celle de x. A partir de la suite u, construisons deux suites u' et u'' définies ainsi:

Si $u_n \notin M$ on prend $u'_n = u''_n = u_n$.

Si $u_n \in M$ on prend u'_n et u''_n vérifiant:

$$d(u_n, u'_n) \leqq 1/n , \quad d(u_n, u''_n) \leqq 1/n$$
$$f(u'_n) - f(u''_n) \geqq a .$$

Il est clair que les suites u' et u'' sont équirépartie. D'autre part, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) - \frac{1}{n}\sum f(u''_i) > \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i)\,;$$

les deux suites

$$n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u'_i) \qquad et \qquad n \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u''_i)$$

ne peuvent tendre toutes les deux vers $\mu_o(f)$ puisque

$$\lim \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) = a\,\mu_o(M)\,.$$

5.4. *Image d'une suite équirépartie*

Soient X, Y deux espaces localement compacts et $f\colon X \to Y$ une application borélienne. Si μ est une mesure sur X son image par f est une mesure notée $f\mu$ $(f\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)))$.

Nous obtiendrons

Proposition H. — Soient (X, μ) un « espace-mesure », Y un espace topologique localement compact et $f\colon X \to Y$ une application borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour toute fonction $g \in \mathscr{C}_c(Y, \mathbf{C})$, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(b) Pour toute fonction g, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(c) Pour toute fonction g caractéristique d'une partie de Y, $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable, $g \circ f$ est μ-$\mathscr{R}$-intégrable.

(d) Pour toute suite $u = (u_n)$ de points de X qui est μ-équirépartie son image $fu = (f(u_n))$ est $f\mu$-équirépartie.

D é m o n s t r a t i o n. Les implications schématisées par:

$$\begin{array}{ccc} (b) & \Rightarrow & (a) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (c) & \Rightarrow & (d) \end{array} \quad \text{sont évidentes}$$

Prouvons, pour achever la démonstration:

$$\text{non (b)} \quad \Rightarrow \quad \text{non (d)}.$$

Soit g et $f\mu$-$\mathscr{R}$-intégrable telle que $g \circ f$ n'est pas μ-$\mathscr{R}$-intégrable. Mais d'après la proposition G, il existe une suite de points de X, u qui est μ-équirépartie et telle qu'on n'a pas

$$\lim \sum g\left(f(u_i)\right) = \mu(g \circ f) = f\mu(g).$$

La suite fu n'est pas $f\mu$-équirépartie.

5.5. *Suites uniformément équirépartie*

Soient (X, μ) un espace mesure et $u = (u_n)$ une suite de points de X.

Nous dirons que la suite u est *uniformément μ-équirépartie*, si, pour toute partie M, μ-$\mathscr{R}$-intégrable, la suite $n \to \Pi(M; N, N+n)/n$ converge vers $\mu(M)$, uniformément par rapport à N.

Existe-t-il toujours des suites uniformément réparties dans un espace mesure (X, μ)? Si X est un groupe abélien compact monothétique, et μ la mesure de Haar dans X la réponse est oui. Il est clair aussi que si (X, μ) et (Y, ν) sont des espaces si f: $X \to Y$ conserve la mesurabilité et est telle que pour toute partie mesurable A de Y, $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \nu(A)$; s'il existe une suite de points de X uniformément μ-équirépartie, son image par f est une suite de points de Y uniformément-ν-équirépartie.

Si μ est mesure de Dirac δ_a, la suite $u_n = a$ est uniformément μ-équirépartie, c'est dire que μ^{N}-presque toutes les suites sont uniformément équiréparties Cependant

Proposition I. — Si (X, μ) est un « espace mesure » et si μ n'est pas une mesure de Dirac, alors pour μ^{N}-presque tout $x = (x_n) \in X^{\mathrm{N}}$ la suite (x_n) *n'est pas uniformément μ-équirépartie.*

Démonstration. Nous mettrons en évidence l'existence d'une partie D de X^{N} qui ne contient aucune suite uniformément μ-équirépartie et dont la mesure μ^{N} est 1.

Soit A un ensemble μ-$\mathscr{R}$-intégrable tel que $0 < \mu(A) < 1$. Il résulte de la démonstration du théorème C que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour μ-$^{\mathrm{N}}$presque tout $x = x_1, x_2, \ldots$, la propriété $\mathscr{P}(k, n)$: $x_{k+1} \in A$, $x_{k+2} \in A, \ldots, x_{k+n} \in A$ a la fréquence égale à $(\mu(A))^{n_o}$. On en déduit que l'ensemble D des $x \in X^{\mathbf{N}}$ tels que pour tout n il existe k de telle sorte qu'on ait la propriété $\mathscr{P}(k, n)$ est un ensemble de mesure 1.

D ne contient aucune suite uniformément μ-équirépartie car pour une telle suite il existe n_o pour lequel la propriété $\mathscr{P}(k, n_o)$ n'a jamais lieu.

5.6. *Conditions minimales d'équirépartition*

On peut, dans certains cas déterminer des familles B de fonctions fournissant un système de conditions nécessaires et suffisantes pour l'équirépartition d'une suite, familles qui sont *minimales.*

Proposition E. — Soient X un groupe abélien *compact*, Γ le groupe de ses caractères continus et Γ' un sous-ensemble de Γ tel que

— Le caractère trivial n'appartient pas à γ'.

— Si γ est un caractère non trivial et $\bar{\gamma}$ son caractère conjugué, un et un seul des deux caractères $\gamma, \bar{\gamma}$ appartient à Γ'.

Alors Γ' est une partie *suffisante pour la mesure de Haar h, qui est minimale.*

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair que Γ' est une partie suffisante pour la mesure h puisque Γ est une partie suffisante pour la mesure h. Considérons $\gamma_o \in \Gamma'$ et $\Gamma'' = \Gamma' - \{\gamma_o\}$. Γ'' n'est pas une partie suffisante de $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$; en effet, nous allons vérifier qu'il existe une mesure μ, distincte de la mesure de Haar h telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, $\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma)$. Alors comme il existe une suite u, μ-équirépartie, cette suite vérifie la condition $\lim \frac{1}{N} \Sigma\, \gamma(u_n) = h(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma''$, elle n'est pas cependant h-équirépartie.

Considérons en effet la mesure v définie à l'aide de la fonction réelle positive $\frac{1}{2}(\gamma_o + \bar{\gamma}_o)$ ($\bar{\gamma}_o$ est le conjugué de γ_o) $\big(dv = \frac{1}{2}\big(\gamma_o(x) + \bar{\gamma}_o(x)\big)\, dh(x)\big)$ alors on vérifie facilement que

$$\mu = h + v$$

est telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \hat{h}(\gamma) = 0 \quad (\gamma \in \Gamma''),$$

tandis que

$$\hat{\mu}(\gamma_o) = \hat{h}(\gamma_o) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 6. Espaces produit

6.1. *Familles suffisantes dans un espace produit*

Proposition F. — Soient (X, μ), (Y, ν) deux espaces-mesures et $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille d'ouverts de X, *dénombrable* et *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν], base topologique de X [resp. Y]. Alors $\mathfrak{M} = \{ U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \}$ est une *base topologique dénombrable* de $X \times Y$, *suffisante pour la mesure* $\mu \times \nu$.

Démonstration. $\mathfrak{M}$ est une base dénombrable de $X \times Y$, montrons qu'elle est suffisante pour la mesure $\mu \times \nu$. Soit une suite $u = (u_n)$ de points de $X \times Y$ telle que pour tout $M = U \times V \in \mathfrak{M}$:

$$\lim_{n\to\infty} \{ \Pi(M, n)/n \} = \mu U \cdot \nu V = \mu \times \nu(M). \tag{1}$$

Il est clair que la relation (1) reste vraie pour l'algèbre de Boole engendrée par la famille $\mathfrak{M}$ et en particulier, qu'elle est vraie lorsqu'on remplace M par une union finie d'éléments de la famille $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$. $\mathcal{O}$ est couvert par les éléments de la famille $\mathfrak{M}$ qui sont inclus dans $\mathcal{O}$. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie S d'éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $S > 0$ et $\mu(\mathcal{O} - S) \leqq \varepsilon$. On en déduit que:

$$\liminf_{n\to\infty} \{ \Pi(\mathcal{O}; n)/n \} = \mu \times \nu(\mathcal{O}). \tag{2}$$

Si enfin A est une partie de $X \times Y$ dont la frontière est de mesure nulle, on déduit, de la propriété précédente appliquée d'une part à l'intérieur de A et d'autre part à l'intérieur de son complémentaire:

$$\lim_{n\to\infty} \big(\Pi(A; n)/n\big) = \mu \times \nu(A).$$

La famille $\mathfrak{M}$ est donc bien suffisante pour $\mu \times \nu$.

6.2. *Démonstration du Théorème E*

Utilisons $\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{V}$] une famille dénombrable *suffisante* pour la mesure μ [resp. ν]. Pour qu'une suite $u_n = (x_n, y_n)$ soit $\mu \times \nu$ équirépartie, il faut et il