§4. Les espace-mesures

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

pour la mesure de Haar h dans Γ; définissons $\hat{\chi}: X \to \mathbf{C}$, par:

$$\hat{\chi}(x) = \int \gamma(x) \chi(\gamma) d h(\gamma)$$

$\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$. Pour une mesure de Borel régulière v telle que $\|v\| < \infty$ on a

$$v(\hat{\chi}) = \int \hat{\chi}(x) dv(x) = \iint \gamma(x) \chi(\gamma) dh(\gamma) dv(x) = \int \chi(\gamma) \hat{v}(\gamma) dh(\gamma) \quad (1)$$

Puisque $\hat{\chi}$ appartient à $C_o(X)$,

$$\lim_{n \to \infty} (\mu_{\tau(n)}(\chi)) = \mu(\chi)$$

et en utilisant (1) on en déduit:

$$\lim_{n \to \infty} \int \chi(\gamma) \hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma) dh(\gamma) = \int \chi(\gamma) \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma).$$

Grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$\int \chi(\gamma) f(\gamma) dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) d\gamma,$$

et, par conséquent

$$\int_k f(\gamma) dh(\gamma) = \int_k \hat{\mu}(\gamma) dh(\gamma). \quad (2)$$

Les fonctions f et μ sont continues au point 0, on déduit de (2):

$$\hat{\mu}(0) = f(0) = 1.$$

La mesure μ, mesure positive, est de norme 1.

3) Démontrons que f est la transformée de Fourier-Stieltjès de μ et que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ. Il résulte de la proposition A que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}_{\tau(n)}(\gamma)$ converge vers $\mu(v)$, par conséquent, on a $f = \mu$. Comme l'application $\mu \to \hat{\mu}$ est injective on en déduit que la suite μ_n ne possède qu'un point d'accumulation μ; elle converge donc vers μ.

§ 4. Les espace-mesures

4.1. *Existence de familles suffisantes dénombrables*

Proposition D. — Si X est un *localement compact* et possède une *base* topologique dénombrable, alors il existe un sous-ensemble $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(X, \mathbf{R})$ qui est à la fois *dénombrable*, *partout dense* dans $\mathscr{C}_c$ et *suffisant*. ($\mathscr{C}_c$ muni de la topologie de la convergence uniforme.)

D é m o n s t r a t i o n. L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui ont une limite à l'infini est séparable (voir Bourbaki [2], § 3, nº 3).

On en déduit, sans difficulté, que $\mathscr{C}_c$ est séparable. Il existe donc une sous-famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{C}_c$ dénombrable et partout denses dans $\mathscr{C}_c$.

Montrons qu'une famille $\mathscr{F}$ partout dense dans $\mathscr{C}_c$ est suffisante.

Toute famille saturée de $\mathscr{B}$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme et par conséquent $\mathscr{F}^{**}$ qui contient $\mathscr{F}$ contient $\mathscr{C}_c$. D'où l'on déduit que $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}^{****} \supset \mathscr{C}_c^{**}$. D'autre part, puisque $\mathscr{F}$ est inclus dans $\mathscr{C}_c$, $\mathscr{F}^{**}$ contient $\mathscr{C}_c^{**}$. On a donc $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{C}_c^{**}$, ce qui est une caractérisation des familles suffisantes.

4.2. *Le point de vue ensembliste*

Soient $u = (u_n)$ une suite de points d'un espace localement compact X muni d'une mesure $\mu \in M_1^+(X)$. Si M est une partie de X on note:

$$\begin{aligned} \Pi(M; n) &= \Pi\big((u_n); M; n\big) = \operatorname{card}\{ i \in \mathbf{N} : 1 \leqq i \leqq n : u_i \in M \} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \chi(u_i) \end{aligned}$$

(χ désignant la fonction caractéristique de M.)

On dira qu'une famille $\mathscr{F}$ de parties de X est *suffisante pour la mesure* μ, si la famille des fonctions caractéristiques correspondantes est suffisante pour la mesure μ.

Proposition E. — Soient (X, μ) un espace-mesure. Alors il existe une famille d'*ouverts* de X, qui est dénombrable, qui est *une base topologique de* X, et qui est *suffisante pour la mesure* μ.

D é m o n s t r a t i o n. D'après la proposition D, il existe une famille $\mathscr{F}$ de fonctions de $\mathscr{C}_c = \mathscr{C}_c(\alpha, \mathbf{R})$ partout dense dans $\mathscr{C}_c$ et dénombrable.

Pour chaque $f \in \mathscr{F}$ considérons un ouvert précompact θ_f, qui contient le support de f et qui est μ-$\mathscr{R}$-mesurable.

D'autre part, considérons une partie dénombrable de $\mathbf{R}$, D_p, qui soit dense dans $\mathbf{R}$ et telle que pour tout $x \in D_p$, $x \neq 0$, $\mu(f^{-1}(\{x\}) = 0$. A f associons la famille dénombrable d'ouverts

$$\mathscr{G}_f = \{ \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[) : a, b \in D_p, a \leqq b \}.$$

Considérons enfin $\mathfrak{M}'$ l'union des familles $\mathscr{G}_f$, lorsque f parcourt $\mathscr{F}$ et montrons que $\mathfrak{M}'$ est une base topologique de X. Soit x un point de X et U un ouvert contenant x; il existe une fonction continue h à support compact qui vaut 1 au point x et 0 sur le complémentaire de U. Soit $f \in \mathscr{F}$

telle que $\sup_{x \in X} \{ | g(x) - h(x) | \} \leq 1/4$. Soit a, b appartenant à D_p tels que $1/4 \leq a < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < b$ et soit l'élément de M', $f^{-1}(]a, b[)$; c'est un ouvert contenant x et inclus dans U.

Montrons maintenant que $\mathfrak{M}'$ est suffisante pour la mesure μ. Désignons par $\mathfrak{M}$, la famille des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M} \subset \mathcal{R}'$ on a

$$\mathfrak{M}^{oo} \subset \mathcal{R}'^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \tag{1}$$

D'autre part si M appartenant à $\mathcal{G}$, $M = \theta_f \cap f^{-1}(]a, b[)$, M est inclus dans une suite d'éléments $M_n \in \mathcal{G}_f$ tels que:

$$M_n \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b]) \supset \theta_f \cap f^{-1}([a, b[) .$$

On en déduit que la fonction caractéristique de

$$\theta_f \cap f^{-1}([a, b[) ,$$

appartient à $\mathfrak{M}^{oo}$.

Comme $\mathfrak{M}^{oo}$ est une algèbre fermée pour la topologie de la convergence uniforme, il est clair que $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathfrak{M}^{oo}$. On en déduit

$$\mathcal{F}^{oo} = \mathcal{C}_c^{oo} \subset \mathfrak{M}^{oooo} = \mathfrak{M}^{oo} . \tag{2}$$

Le fait que $\mathfrak{M}'$ est une famille suffisant pour la mesure μ, est une conséquence de (1) et (2).

§ 5. Existence, propriétés des suites μ-équiréparties Image d'une suite μ-équirépartie

5.1. *Démonstration du Théorème C*

Image d'une suite μ-équirépartie

Il est clair, puisque X^J est à base dénombrable, qu'il suffit de démontrer pour $f \in \mathcal{B}(X^J, \mathbf{R})$ que pour $\mu_o^{\mathbf{N}}$-presque tout x:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(P_J(\sigma^{u_i}(x))) = \mu^J(f) .$$

Nous pouvons supposer que $\mu^J(f) = 0$. Posons