Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1971)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU
Autor: Batbedat, André
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44577

DISTANCE BOOLÉENNE SUR UN 3-ANNEAU

par André BATBEDAT

INTRODUCTION

Dans [3] et [4] respectivement, R. A. MELTER et J. ZEMMER se sont intéressés à une géométrie booléenne sur un p-anneau.

Le travail ici présenté a été motivé par leurs articles; nous avons essayé de retrouver les principales propriétés de la géométrie classique dans le cas particulier des 3-anneaux (voir définition 2).

Pour les transformations ponctuelles l'adaptation est relativement aisée; par contre il ne semble pas que les notions de droite ou de segment conviennent dans cette théorie: c'est le disque qui s'impose...

Nous avons opté pour un exposé élémentaire afin que cet article soit accessible à tous les mathématiciens spécialistes de la question ou non. C'est ainsi que nous n'utilisons pas directement la notion de spectre pour un anneau et commençons par des rappels très développés concernant les anneaux booléens.

Tous les anneaux considérés sont unitaires.

Rappel :

Un *anneau booléen* $(B, \oplus, .)$, muni de la somme $\oplus$ et du produit $.$, est défini par:

« Pour tout $\alpha \in B$, $\alpha^2 = \alpha$ » (Tout élément est idempotent).

Par $(2\alpha)^2 = 4\alpha = 2\alpha$, on voit que B est de caractéristique 2. Par $(\alpha \oplus \beta)^2 = = \alpha \oplus \beta$ il vient $\alpha\beta \oplus \beta\alpha = 0$: compte-tenu de ce qui précède, B est commutatif.

Considérons sur B la relation $\alpha\beta = \alpha$; elle est réflexive (idempotence), antisymétrique (commutativité) et transitive: c'est une relation d'ordre $\alpha \leq \beta$.

Puisque pour tout $\alpha \in B$, $\alpha 0 = 0$ et $\alpha 1 = \alpha$, 0 est le plus petit élément et 1 le plus grand.

Si ε est un minorant de γ et δ alors $\varepsilon\gamma = \varepsilon$ et $\varepsilon\delta = \varepsilon$ donc $\varepsilon\gamma\delta = \varepsilon$: ε minore $\gamma\delta$. Or $\gamma\delta\gamma = \gamma\delta$ et $\gamma\delta\delta = \gamma\delta$: $\gamma\delta$ est un minorant de γ et δ.

Ainsi pour tout couple (γ, δ) il existe un plus grand minorant $[\operatorname{Inf}(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \wedge \delta$: On dit que $(B, \trianglelefteq)$ est un inf-demi-treillis.

On vérifie de même que pour tout couple (γ, δ) il existe un plus petit majorant $[\operatorname{Sup}(\gamma, \delta)]$ noté $\gamma \vee \delta$, à savoir $\gamma \oplus \delta \oplus \gamma\delta$. On dit alors que $(B, \trianglelefteq)$ est un treillis.

Ce treillis est distributif parce qu'il en est ainsi des opérations $\wedge$ et $\vee$, l'une par rapport à l'autre; il est complémenté: pour tout $\alpha \in B$,

$$\alpha \wedge (1 \oplus \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \vee (1 \oplus \alpha) = 1 .$$

Comme exemple (classique) d'anneau booléen citons l'ensemble des parties d'un ensemble muni de la différence symétrique et de l'intersection: le inf et le sup correspondant respectivement à l'intersection et à la réunion.

Le seul anneau booléen intègre est $\mathbf{Z}_{/2}$ (et c'est un corps); en effet, avec $\alpha . (1 \oplus \alpha) = 0$, l'intégrité implique $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

Définition 1 :

Soit A un ensemble, B un anneau booléen et d une application de A^2 dans B telle que:

$$\begin{cases} \text{i) } d(a, b) = 0 \text{ ssi}^{1)}\ a = b \\ \text{ii) } d(a, b) = d(b, a) \\ \text{iii) } d(a, b) \vee d(b, c) \trianglerighteq d(a, c) \end{cases}$$

pour tous a, b, c de A.
On dit que d est une *distance* (booléenne) sur A.

Exemple :

On vérifie que si $A = B$, $d(\alpha, \beta) = \alpha \oplus \beta$ est une distance sur B.

Définition 2 :

A est un *3-anneau* [2] si c'est un anneau vérifiant:

pour tout $a \in A$, $a^3 = a$ et $3a = 0$

Dans toute la suite A désigne un 3-anneau.

Exemple :

$(\mathbf{Z}/3)^n$ est un 3-anneau.

---

[1]) ssi: si et seulement si.
[2]) Les 3-anneaux sont étudiés dans: [1], *ensemble généralisé des parties d'un ensemble.*

Remarque 1 :

i) Dans A tout carré est idempotent ($a^4 = a^2$).
On note B l'ensemble des idempotents.

ii) $a^2 = 0$ est équivalent à $a = 0$

iii) $4a = a$ pour tout $a \in A$.

MONTRONS QUE TOUT 3-ANNEAU EST COMMUTATIF

Pour tout $a \in A$, tout $\alpha \in B$, $a = 1.a = (1-\alpha)\, a + \alpha a$ d'où: $a\alpha = (1-\alpha)\, a\alpha + \alpha a \alpha$

De $[(1-\alpha)\, a\alpha)^2 = 0$ on tire (Remarque 1, ii)] $a\alpha - \alpha a \alpha = 0$

De même $\alpha a - \alpha a \alpha = 0$

et par conséquent $\alpha a = a\alpha$: on dit que les idempotents de A sont centraux.

Ainsi on a: $a\,(a^2+b)^2 = (a^2+b)^2 a$ (Remarque 1, i))

Soit $a\,(a^2 + a^2 b + b a^2 + b^2) = (a^2 + a^2 b + b a^2 + b^2) a$

$$a + ab + aba^2 + ab^2 = a + a^2 ba + ba + b^2 a$$

$$2ab = 2ba$$

d'où (Remarque 1, iii)): $\boxed{ab = ba}$ tous a, b, dans A.

Remarque 2 :

B, ensemble des idempotents de A, muni de la somme: $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$ et du produit $\alpha\beta$ (produit dans A) est un anneau booléen.

Le sup et le inf s'expriment avec les opérations dans A:

$$\begin{cases} \gamma \wedge \delta = \gamma\delta \\ \gamma \vee \delta = \gamma + \delta - \gamma\delta \end{cases}$$

Lemme 1 :

Pour tous a, b, c de A, l'expression:

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2 \,,$$

est symétrique en a, b, c.

En effet: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 + ab$ et par suite (remarque 2):

$$(a-b)^2 \vee (b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2bc - b^2ca - c^2ab\ .$$

Propriété 1 :

L'application d de A^2 dans B (Remarque 2) définie par:

$$d\,(a,b) = (a-b)^2\,.$$

est une distance (booléenne).