

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 16 (1970)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES  
**Autor:** Lesieur, L.  
**Kapitel:** 3. Géométries sur les ensembles finis  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-43861>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. Treillis géométrique $L(S)$

Les ensembles fermés (ou variétés) suffisent à définir l'application de fermeture de Moore en postulant que l'intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.

On peut les ordonner par la relation d'inclusion des ensembles et obtenir ainsi un *treillis* (particulier) qu'on appelle *géométrique*. Il est possible de donner des propriétés caractéristiques de ces treillis (voir [3]) qui permettent de reconstituer la géométrie combinatoire. En particulier la notion de dimension apparaît également comme longueur d'une chaîne maximale allant de  $\emptyset$  à  $S$ , diminuée de 1, cette longueur étant un invariant pour toutes les chaînes maximales considérées.

*Exemple :*

Géométrie sur 5 points schématisée par le dessin de la figure 3, où les points situés sur les droites dessinées constituent une variété, qui est une droite de cette géométrie. La figure 4 représente le treillis  $L(S)$  correspondant. C'est un treillis de dimension 2 (rang 3). Une géométrie de dimension 2 s'appelle un plan.

Bien entendu, une géométrie projective ou affine de dimension finie constitue un exemple de géométrie combinatoire (que l'on peut d'ailleurs caractériser dans la classe des géométries combinatoires). Mais il y en a beaucoup d'autres, citons les géométries affines généralisées ([3], p. 303), l'ensemble des relations d'équivalence sur un ensemble, les six exemples dits classiques de [1] etc...

## 3. Géométries sur les ensembles finis

Cherchons par exemple les géométries finies sur 5 points.

dimension 1:  $S$  est la seule droite. (fig. 5)

dimension 2: 4 possibilités, avec représentation plane de la figure 6

dimension 3: 3 possibilités avec représentation dans l'espace de la figure 7

dimension 4: 1 possibilité, représentée par 5 points en position générale dans l'espace de dimension 4.

Le nombre  $g_{nd}$  des géométries « non isomorphes » sur  $n$  éléments et de dimension  $d$  est donné par le tableau [1], § 3.

	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$d$									
1			1	1	1	1	1	1	1
2				1	2	4	9	23	68
3					1	3	11	49	617
4						1	4	22	217
5							1	5	40
6								1	6
7									1
$g_n$			1	2	4	9	26	101	950

Si l'on pose  $g_n = g_{n1} + g_{n2} + \dots + g_{n,n-1} =$  (nombre total des géométries différentes sur  $n$  éléments), on constate que  $g_{n+1} \# (g_n)^{\frac{3}{2}}$  ce qui donnerait environ 30 000 géométries différentes sur un ensemble à 9 points.

Nous allons donc pour continuer nous limiter au cas des plans ( $d=2$ ), ligne soulignée du tableau.

#### 4. Géométries planes combinatoires

Si  $d = 2$ , les seules variétés sont les points, les droites et l'ensemble  $S$  tout entier. Une géométrie plane combinatoire pourra alors être définie par l'ensemble  $S$  de ses points et l'ensemble de ses droites, qui est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(S)$  satisfaisant aux axiomes suivants (cf [3], p. 318).

$G_1$ . Par deux points distincts il passe une droite et une seule.

$G_2$ . Toute droite contient au moins deux points distincts.

$G_3$ . Il existe 3 points non situés sur une même droite.

Si l'ensemble  $S$  est fini, on obtient un plan combinatoire fini.

#### 5. $(k, r)$ plans combinatoires

Nous allons considérer maintenant des géométries planes combinatoires finies qui sont également des  $(k, r, s)$  plans au sens de G. HEUZE [7] et des « blocks-designs » ou configurations tactiques au sens de [2], § 2. D'une façon précise nous définissons un  $(k, r)$  plan combinatoire par les axiomes suivants (concernant comme toujours, un ensemble  $S$  de points et un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(S)$  dont les éléments sont dénommés droites)