Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 16 (1970)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES DE PLUSIEURS ENTIERS
Autor: Delange, Hubert
Kapitel: 2. Préliminaires
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43864

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \le x_1 \\ n_2 \le x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \le x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o\,[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y.

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leqslant 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \le x \\ n \le y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers $\geqslant 1$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Préliminaires

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász.

f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p}\{1-\Re e\,[f(p)\,p^{-iu}]\} < +\infty \text{ [1]} \tag{3}$$

On a ensuite les résultats suivants:

1. S'il n'existe aucun u réel tel que l'on ait (3), f possède une valeur moyenne nulle.

2. Supposons maintenant qu'il existe un u réel tel que l'on ait (3), soit u_0.

Alors,

a. Si $2^{-iru_0} f(2^r) = -1$ pour tout $r \geqslant 1$, f possède une valeur moyenne nulle.

b. Si $2^{-iru_0} f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \geqslant 1$, on a (1) avec $a = u_0$ et

$$L_1(t) = \exp\left\{i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\,[f(p)\,p^{-iu_0}]\right\}.$$

2.1.1. Ajoutons que, lorsque l'on est dans le cas 2 avec $u_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\sum \frac{1}{p}\{1-\Re e\, f(p)\} < +\infty,$$

on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} f(n) = \prod_{p \leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left[1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right] + o\,[1].$$

Ceci est une conséquence inmédiate d'un théorème que nous avons établi ailleurs [2].

2.2. Il nous est utile aussi de rappeler quelques notions et quelques résultats élémentaires concernant les fonctions de $\mathscr{A}_2$, que nous avons indiqués dans l'article cité au paragraphe 1.1 (et qui se généralisent naturellement à $\mathscr{A}_q$).

2.2.1. Dans $\mathscr{A}_2$ on définit l'opération de convolution de la façon suivante:

$f * g$ est la fonction h définie par

$$h(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

La convolution est commutative et associative.

---

[1]) Il est clair que, pour chaque p, $1 - \mathrm{Re}\,[f(p)\,p^{-iu}] \geqslant 0$.

2.2.2. f et g étant deux fonctions de $\mathscr{A}_2$ et w_1 et w_2 deux variables complexes, si les séries doubles

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

sont absolument convergentes pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \alpha$ et $\mathfrak{Re}\, w_2 = \beta$, il en est de même de la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}, \qquad \text{où} \qquad h = f * g,$$

et on a pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \alpha$ et $\mathfrak{Re}\, w_2 = \beta$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right).$$

2.2.3. Toute fonction f de $\mathscr{A}_2$ telle que $f(1, 1) \neq 0$ peut se mettre sous la forme

$$f = g * h,$$

où $h(m, n) = f(m, 1) f(1, n)$ et g satisfait à

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

Si f appartient à $\mathfrak{M}_2$, les fonctions g et h appartiennent aussi à $\mathfrak{M}_2$.

2.3. Indiquons aussi le résultat suivant:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Supposons que

1° On n'a pas

$$|f(2, 1)| = 1 \text{ et } f(2^r, 1) = (-1)^{r+1} f(2, 1)^r \text{ pour tout } r > 1;$$

2° On n'a pas

$$|f(1, 2)| = 1 \text{ et } f(1, 2^s) = (-1)^{s+1} f(1, 2)^s \text{ pour tout } s > 1.$$

Alors la fonction g considérée au paragraphe 2.2.3 satisfait à

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty, \tag{4}$$

de sorte que la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

est absolument convergente pour $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2 = 1$.

De plus, on a pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \tag{5}$$

le produit infini étant absolument convergent.

On trouvera dans notre article « On some sets of pairs of positive integers » [1] (du haut de la page 272 à la fin du paragraphe 3.2.5) la démonstration, sous les mêmes hypothèses, de (4) et de la formule que donne (5) en y prenant $w_1 = w_2 = 1$. On verra immédiatement quelle petite modification de la démonstration permet d'obtenir (5) avec w_1 et w_2 quelconques satisfaisant à $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$.

Remarquons que les hypothèses 1° et 2° sont satisfaites en particulier si l'on a

$$f(2^r, 1) = 0 \text{ pour tout } r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad f(1, 2^s) = 0 \text{ pour tout } s \geqslant 1.$$

Le facteur correspondant à $p = 2$ dans le produit infini au second membre de (5) est alors égal à 1, et (5) s'écrit

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

C'est ce cas particulier que nous utiliserons.

2.4. Nous utiliserons aussi la remarque immédiate suivante:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ et soient f_1 et f_2 les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$f_1(p^r, p^s) = \begin{cases} f(p^r, p^s) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

et

$$f_2(p^r, p^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 2, \\ f(2^r, 2^s) & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

pour r et $s \geqslant 0$ et $r + s > 0$.

Alors on a

$$f = f_1 * f_2.$$

---

[1]) Journal of Number Theory, 1 (1969), p. 261-279.