

Appendix Local noetherian rings

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

APPENDIX

Local noetherian rings

All rings here as well as in the preceding lectures are supposed to be commutative and have units. A ring A is called *local* if it contains exactly one maximal ideal ; this will be denoted by $\mathfrak{m}(A)$ or simply $\mathfrak{m}$. A module E over a ring A is called *finite* if it is finitely generated over A . A module E over A is called *noetherian* if E is unitary (i.e. $1x = x$ for all $x \in E$) and every submodule of E is finite over A . In particular A itself is noetherian if and only if all its ideals are finitely generated.

We state without proof the following result.

Theorem (Lemma of Artin-Rees). Let A be a noetherian ring and I an ideal of A . Let E be a finite A -module and F_1, F_2 submodules of E . Then there is an integer n such that

$$I((I^n F_1) \cap F_2) = (I^{n+1} F_1) \cap F_2.$$

The proof may be found in Nagata [8, Theorem 3.7] or, for $F_1 = E$ which is the only case we shall need, in Bourbaki [1, Ch. III, 3, no 1].

Lemma (called Nakayama's lemma by Bourbaki). Let A be a local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and E a finite A -module.

- (i) If $E = \mathfrak{m}E$, then $E = 0$.
- (ii) If F is a submodule of E such that $E = F + \mathfrak{m}E$, then $F = E$.
- (iii) Let $k = A/\mathfrak{m}$, a field. Then $k \otimes_A E = 0$ implies $E = 0$.

Proof. (i) Let $x_1, \dots, x_n$ be generators for E , $n \geq 1$. We can then write $x_n = \sum_1^n a_j x_j$ for some $a_j \in \mathfrak{m}$, hence $(1 - a_n) x_n = \sum_1^{n-1} a_j x_j$. Since $1 - a_n$ is invertible this means that $x_1, \dots, x_{n-1}$ generate E . The minimal number of generators must therefore be zero, i.e. $E = 0$.

(ii) We only need to apply (i) to E/F .

(iii) We have $k \otimes_A E = E/\mathfrak{m}E$ which reduces (iii) to (i).

If E is a module over a local ring A the sets $\mathfrak{m}^k E$, $k \geq 0$, form a basis of the neighborhoods of $0 \in E$ for a topology in E . This topology, making E into a topological group, is called the Krull topology of E .

Combining the two previous results we can prove the following

Theorem (Krull). Let A be a local noetherian ring, E a finite module over A . Then:

- (i) The Krull topology of E is separated.
- (ii) Every submodule F of E is closed in E .
- (iii) The topology induced by E in a submodule F is the Krull topology of F .

Proof. (i) Let $F = \bigcap_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k E = \overline{\{0\}}$. Then

$$\mathfrak{m}F = \mathfrak{m}((\mathfrak{m}^n E) \cap F) = (\mathfrak{m}^{n+1} E) \cap F = F$$

by the Artin-Rees lemma. Hence Nakayama's lemma implies that $F = \{0\}$.

(ii) Let $f: E \rightarrow E/F$ be the natural map. Then

$$f(\bar{F}) \subset f(F + \mathfrak{m}^k E) = f(\mathfrak{m}^k E) = \mathfrak{m}^k (E/F).$$

Hence $f(\bar{F}) \subset \bigcap \mathfrak{m}^k (E/F) = \{0\}$, using (i). But $f(\bar{F}) \subset \{0\}$ is equivalent to $\bar{F} \subset F$.

(iii) It is clear that $\mathfrak{m}^k F \subset (\mathfrak{m}^k E) \cap F$. Hence the Krull topology of F is finer than that induced by E ; in other words the inclusion $F \rightarrow E$ is continuous. Conversely the Artin-Rees lemma shows that

$$(\mathfrak{m}^{n+k} E) \cap F = \mathfrak{m}^k ((\mathfrak{m}^n E) \cap F) \subset \mathfrak{m}^k F$$

which proves that the induced topology is finer than the Krull topology of F .

REFERENCES

- [1] BOURBAKI, N. *Algèbre commutative*, ch. 3, 4. Hermann, Paris 1961.
- [2] GRAUERT, H. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, publications mathématiques, *I.H.E.S.*, n° 5, Paris 1960.
- [3] ——— *Lectures at Otaniemi* Finland 1967 (in this volume).
- [4] GROTHENDIECK, A. *Exposés 7-17 in Séminaire Cartan* Paris 1960/61.
- [5] GUNNING, R. C. and H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- [6] HOUZEL, C. *Exposés 18-21 in Séminaire Cartan*, Paris 1960/61.
- [7] MATHER, J. N. *Stability of C^∞ mappings II* (to be published in *Annals of Math.*).
- [8] NAGATA, M. Local rings. *Interscience*, New-York 1962.
- [9] NARASIMHAN, R. Introduction to the theory of analytic spaces. *Lecture notes in Mathematics*, n° 25. Springer, Berlin 1966.