

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: WELCHE VORKENNTNISSE IM AXIOMATISCHEN DENKEN KANN
DAS GYMNASIUM VERMITTELN?
Autor: Kirsch, Arnold
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40735>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

WELCHE VORKENNTNISSE IM AXIOMATISCHEN DENKEN KANN DAS GYMNASIUM VERMITTELN? ¹⁾

von Arnold KIRSCH

Die heutige Auffassung von der Mathematik als einer rein deduktiven Wissenschaft muss sich naturgemäss auch in einem modernen Schulunterricht in geeigneter Weise widerspiegeln. Ich möchte hier, auf Grund meiner Erfahrungen als Lehrer und besonders im Hinblick auf den Übergang von Schule zu Universität (den ich an zahlreichen Schülern beobachten konnte) einige Bemerkungen zur Beantwortung der Frage machen, wie weit eine deduktive Behandlung der Mathematik an der Schule wünschenswert und wie weit sie (mit vernünftigem Aufwand) realisierbar ist.

Es wird heute allgemein anerkannt, dass das Gymnasium nicht die Aufgabe hat, eine spezifische Vorbereitung der wenigen zukünftigen Mathematiker auf ihr Studium zu leisten. Nichtsdestoweniger ist es aus allgemein pädagogischen Gründen wünschenswert, dass das Gymnasium *allen Schülern* ein erstes Verständnis der axiomatischen Methode vermittelt. Denn ein solches Verständnis ist unerlässlich (wenn auch nicht hinreichend) für eine richtige Einschätzung der Mathematik und ihrer Bedeutung für die heutige Kultur, kurz: für ein richtiges *Bild* von der Mathematik, wie es jeder Absolvent des Gymnasiums mitbekommen sollte. Insbesondere muss den Abiturienten eine tragfähige Grundlage für die Wahl des Studienfaches gegeben werden. Indem so verhindert wird, dass Schüler mit einer falschen Vorstellung von dem, was Mathematik ist, sich für ein mathematisches Studium entscheiden, kann die Schule eine ihr angemessene Vorbereitungsarbeit leisten und dazu beitragen, Misserfolge von Studenten im ersten Semester einzuschränken.

¹⁾ Vortrag, gehalten am 9. 10. 1964 auf dem IMUK-Seminar in Frascati. — Die hier skizzierte Axiomatisierungsübung wird ausführlich beschrieben in « Math.-Phys. Semesterberichte », Band XIII/Heft 1 (1966).

Wie lässt sich das genannte Ziel erreichen? Es ist eine allzu grobe Vereinfachung, wenn man mit J. Dieudonné sagt, auf der Unterstufe (bis etwa zum 13. Lebensjahr der Schüler) gehe der Unterricht *experimentell* vor und auf der Oberstufe (ab 16 Jahren) *deduktiv*. Die Mittelstufe wird dabei gleichsam als ein peinliches Übergangsstadium angesehen — in dem jedenfalls die Pubertät liegt. Nun bildet aber gerade der Bereich zwischen einer rein experimentellen und einer rein deduktiven Behandlung der Mathematik, der hier nur durch Stichworte wie *intuitives Einsehen*, *plausibles Schliessen*, *lokales Ordnen*¹⁾, *Axiomatisieren* umrissen sei, das eigentliche Feld des gymnasialen Unterrichts. Auch das « In-Evidenz-Setzen » gewisser elementarer Struktureigenschaften (etwa der Vektorraum-Axiome), wie es von G. Papy vorgeschlagen wird, gehört wohl in diesen Zwischenbereich. Demgegenüber verträgt sich eine konsequent deduktive Darstellungsweise nur schlecht mit dem Stil des modernen Unterrichts, der ja die Selbsttätigkeit der Schüler zu aktivieren hat. Die Schwierigkeiten sind hier noch viel grösser als die von H. Behnke wiederholt betonten Schwierigkeiten im akademischen Anfangsunterricht.²⁾

Im Hinblick auf das Ziel, allen Schülern ein erstes Verständnis der axiomatischen Methode zu vermitteln, schlage ich für das Gymnasium *Übungen im Axiomatisieren* vor, an einfachen und inhaltlich vertrauten Bereichen des Schulstoffs. Im folgenden skizziere ich ein (allerdings sehr einfaches) Beispiel einer solchen, im Unterricht erprobten Axiomatisierungsübung.

Bekannt sei das Rechnen im angeordneten Körper $(Q, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen, im Sinne naiver praktischer Beherrschung (wie sie etwa der Ingenieur besitzt), aber ohne Bewusstsein des deduktiven Charakters. Als Aufgabe wird gestellt, eine *Theorie des Rechnens mit $<$* zu entwickeln, wobei $+$ und $\cdot$ weiterhin naiv behandelt werden sollen. Die wichtigsten Schritte der mit den Schülern zu erarbeitenden Lösung sind:

1. Das *Sammeln* von hinreichend vielen, etwa 15 einschlägigen Aussagen, d.h. Rechenregeln mit $<$ und daneben eventuell $+$

1) Siehe H. Freudenthal in « Der Mathematikunterricht », Heft 4/1963, S. 5-29.

2) Siehe H. Behnke in « Math.-Phys. Semesterberichte », Band XI/Heft 1, S. 1-19.

und $\cdot$ (würde man hier schon $+$ und $\cdot$ ausschliessen, so liessen sich nicht leicht genügend viele einfache und interessante Aussagen finden).

2. Die schrittweise *Reduktion* der gesammelten Aussagen auf gewisse *Grundaussagen*, aus denen sich die übrigen folgern lassen, etwa auf die Aussagen:

$$\text{I} \quad a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$\text{II} \quad a < b \Rightarrow a \neq b$$

$$\text{III} \quad a \neq b \Rightarrow a < b \text{ oder } b < a$$

$$\text{IV} \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$\text{V} \quad a < b, 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

3. Der Nachweis der *Unabhängigkeit* von I bis V. Dieser ist zwar theoretisch nicht besonders wichtig; er wird aber von kritischen Schülern, die den Reduktionsvorgang wirklich verstanden haben, verlangt. Die im folgenden angegebene Relation in Q besitzt jeweils alle Eigenschaften I bis V ausser

$$\text{I:} \quad \neq;$$

$$\text{II:} \quad \leq;$$

$$\text{III:} \quad \ll \text{ (definiert durch } a \ll b \Leftrightarrow a + 1 < b \text{);}$$

$$\text{IV:} \quad \text{beliebige lineare Ordnung von } Q, \text{ bei der } 0 \text{ maximal ist;}$$

$$\text{V:} \quad >.$$

4. Übungsaufgaben im *Deduzieren* neuer Regeln — und nicht nur im Anwenden bereits deduzierter Regeln! Von den Schülern werden hierbei immer wieder Rückgriffe auf nicht einschlägige Aussagen vorgenommen; zum Beispiel wird zum « Beweis » der Regel $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ gern der Flächeninhalt von Quadraten herangezogen. Dies verlangt vom Lehrer:

5. *Argumente* für eine deduktive Theorie. Die Deutung von I bis V als « Spielregeln » kann zu einem falschen Bild von der Mathematik führen. Ästhetische Gesichtspunkte werden von Schülern kaum anerkannt. Überzeugender ist das Argument der *Denkökonomie*; dies erfordert jedoch die Angabe von verschie-

denen *Modellen*, hier also von Körpern, in denen eine Relation $<$ mit I bis V erklärt ist. Auch das Erfülltsein nur einiger der Eigenschaften I bis V kann von Interesse sein. Übrigens verlangt auch die von G. Pickert vorgeschlagene Deutung der Axiome einer Theorie als « Diskussionsgrundlage » mitunter vom Lehrer die Angabe verschiedener Modelle, nämlich wenn es darum geht, Schüler von der Nicht-Stichhaltigkeit eines Arguments zu überzeugen. Besonders lehrreiche Modelle aus dem Schulstoff werden im vorliegenden Falle durch den Körper der rationalen Funktionen über Q , versehen mit verschiedenen linearen Anordnungen, gebildet. Die Diskussion dieser — archimedischen oder auch nichtarchimedischen — Anordnungen führt zu einer Fülle interessanter Untersuchungen, insbesondere zu der Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit einer Relation $<$ (in einem gegebenen Körper) durch die Eigenschaften I bis V.

Das hier skizzierte Beispiel einer (noch unvollständigen) Axiomatisierung zeigt unter anderem den grossen Zeitaufwand, den die Vermittlung eines angemessenen Verständnisses der axiomatischen Methode erfordert! — Bei der Weiterführung dieser Axiomatisierung könnte man sich einerseits auf Aussagen allein mit $<$ konzentrieren und dadurch zur reinen *Ordnungstheorie* kommen; andererseits könnte man nun auch die Eigenschaften von $+$ bzw. $\cdot$ axiomatisieren und so auf natürlichem Wege zur *Gruppentheorie* gelangen. Dies sind wohl die einfachsten Beispiele vollständig axiomatisierter Theorien; für sie gibt es im Schulstoff eine Fülle von Modellen. Aber in ihnen sind nicht so viele einfache und hinreichend interessante Deduktionsübungen möglich wie in unserem einführenden Beispiel.

Ähnliche Axiomatisierungen lassen sich in verschiedenen Gebieten des Schulstoffs durchführen. Am meisten Erfahrungen hat man in der Bundesrepublik Deutschland bisher mit der *Gruppentheorie* gemacht; im allgemeinen werden hier nach eingehender Diskussion von Modellen die ersten Schritte einer deduktiven Theorie entwickelt. Ähnliches gilt für die *Boolesche Algebra* und — mit Einschränkungen — für die ebene *Inzidenzgeometrie* und *affine Geometrie*, wobei die bekannten endlichen Modelle eine wichtige Rolle spielen (die allerdings geringer als in der Gruppentheorie ist). G. Pickert hat in einer Arbeits-

gemeinschaft mit Schülern aus einer grossen Anzahl elementargeometrischer Begriffe, die von den Schülern gesammelt waren, einige als Grundbegriffe herausgehoben und zum Aufbau der Elementargeometrie benutzt ¹⁾. Die volle (euklidische) Elementargeometrie erscheint allerdings wegen der starken « ontologischen Bindung » ²⁾ ihres Gegenstandes für eine Einführung in das axiomatische Denken weniger geeignet, und das gleiche gilt für die — in vielen Schulbüchern erwähnte, aber nicht durchgeführte — Peanosche Begründung der natürlichen Zahlen ³⁾.

Mit diesen knappen Betrachtungen kann ich den bewundernswerten Programmen für eine Modernisierung des Gymnasialunterrichts aus einheitlicher Konzeption nicht gerecht werden. Wenn ich hier für Axiomatisierungsübungen an ausgewählten Gebieten plädiere, so kommt es mir darauf an, anzudeuten, dass bereits mit bescheidenem Aufwand der aktuellen Schwierigkeit des Übergangs von Schule zu Universität abgeholfen werden kann. Es scheint mir wichtig zu sein, in diesem Sinne Vorschläge zu entwickeln, die die Gymnasiallehrerschaft überzeugen und die ihr realisierbar erscheinen.

A. Kirsch
Pädagogische Hochschule
Waldweg 26
34 Göttingen

¹⁾ Für die Durchführung dieses Aufbaus siehe G. Pickert in « Math.-Phys. Semesterberichte », Band X/Heft 2, S. 202-223.

²⁾ Siehe H. Freudenthal, loc. cit. 1).

³⁾ Eine eingehende didaktische Analyse des Peanoschen Axiomensystems wurde am 31.5.1965 auf dem IMUK-Seminar in Echternach (Grossherzogtum Luxemburg) vorgetragen.

Vide-leer-empty