Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OVALES ET OVOÏDES
Autor: Ehrhart, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40725

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

OVALES ET OVOÏDES [1])

par E. EHRHART

INTRODUCTION

La notion de convexité a toujours joué un rôle important en géométrie. Il est d'autant plus étonnant que ce n'est qu'en 1887, que paraît le premier ouvrage consagré uniquement et systématiquement à la convexité, la thèse de Brunn *Ovales et ovoïdes*. Depuis lors de nombreux livres ont été écrits à ce sujet. Parmi les plus importants citons:

[1] MINKOWSKI, 1905, *Théorie des corps convexes.*
[2] BLASCHKE, 1916, *Cercle et sphère.*
[3] BONNESEN et FENCHEL, 1934, *Théorie des corps convexes.*
[4] JAGLOM et BOLTYANSKI, 1951, *Figures convexes.*
[5] EGGLESTONE, 1957, *Applications de la convexité.*
[6] HADWIGER, 1958, *Cours sur le volume, la surface et l'isopérimétrie.*
[7] 1963, *Convexité*, par la Société Mathématique américaine.

Le plus complet de ces ouvrages est sans doute [3]. (Il commence malheureusement à dater). On y cite plus de 200 auteurs et près de 800 titres. En particulier on y trouve mentionnées en bonne place une douzaine de publications de Jean Favard. [4] est un livre admirable de simplicité et d'ingéniosité. Quoi qu'il s'adresse à des élèves, on y trouve mainte question ouverte. Il se lit vraiment comme un roman, un roman policier, car les questions posées ensemble dans une première partie sont résolues dans la seconde. [5] montre à quel point la convexité s'introduit dans les disciplines mathématiques les plus variées. [7], gros ouvrage de plus de 500 pages, est le compte rendu du Symposium sur la Convexité, qui a eu lieu en juin 1961 à Seattle (Washington). On y engrange une ample moisson de résultats récents. J'ai eu l'agréable surprise de m'y voir cité une dizaine de fois.

Il est remarquable que d'une hypothèse aussi réduite que la convexité — cette restriction n'empêche que l'ovale dépende d'une infinité de paramètres — on ait pu déduire tant de résultats nullement évidents, et cela en l'absence de toute méthode générale. On ne peut évidemment espérer trouver des égalités, mais on obtient des inégalités, ou ce qui revient au même, des extrema. L'absence de méthode classique déjà signalée, que l'on retrouve d'ailleurs dans toute la moderne géométrie finie, est un des attraits du sujet. Paul Montel l'a magistralement caractérisée au Colloque de Liège de 1955:

> « L'application à ces questions des méthodes usuelles de l'analyse se heurte le plus souvent à de très grandes difficultés. ... l'imagination y joue autant de rôle que l'esprit critique, car les méthodes doivent être créées de toutes pièces, dès que l'on abandonne le support analytique. »

Terminologie

Rappelons d'abord quelques définitions essentielles de la théorie des corps convexes. Un corps est *convexe*, s'il contient tout segment dont il contient les extrémités. Une figure plane convexe et bornée, autre qu'un segment de droite, sera appelée ovale, même si son contour comporte des points anguleux ou des segments de droite. (On précisera s'il y a lieu, s'il s'agit de l'ovale ouvert ou fermé). Une *droite-support* d'un ovale est une droite de son plan qui contient au moins un point de son bord, et qui laisse l'ovale entièrement d'un même côté. La plus grande et la plus petite distance entre deux droites-supports parallèles d'un ovale sont respectivement son *diamètre* et sa *largeur*. Définition analogue du *plan-support* de l'ovoïde — la figure convexe bornée à trois dimensions — de son diamètre et de sa largeur.

Naturellement il ne peut pas être question de faire ici un rapport exhaustif sur le sujet. On ne peut que citer quelques résultats particulièrement intéressants à tel ou tel égard. Je vais classer les théorèmes choisis en quatre catégories, quelque peu arbitrairement.

I. Théorèmes importants

Si les propositions de ce chapitre ont de nombreuses applications, cela vient sans doute de leur généralité; on peut en effet les étendre à l'espace à n dimensions.

Rappelons d'abord quelques propriétés, qui, pour être banales, n'en sont pas moins importantes:

— L'intersection de plusieurs ovales est un ovale. Théorème analogue pour les ovoïdes. Toute section plane d'un ovoïde est un ovale. L'ombre au soleil d'un ovale ou d'un ovoïde est un ovale.

Encore intuitif, mais plus difficile à démontrer:

— Le périmètre d'un ovale est plus court que toute courbe fermée qui l'entoure; de même la surface d'un ovoïde est inférieure à toute surface fermée qui le contient.

— Tout ovoïde est rigide, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de déformation continue, conservant les longueurs des courbes tracées sur sa surface.

Et voici deux propositions capitales, aussi générales que simples, les théorèmes de Brunn et de Helly.

Théorème de Brunn: Dans le cas le plus complet, la variation des cordes parallèles d'un ovale ne présente que trois phases successives: croissance, constance, décroissance; une ou deux de ces phases peuvent d'ailleurs manquer (pensons par exemple aux cordes d'un triangle parallèles à un côté.) « Un ovale normal (c'est-à-dire dont le contour ne comporte pas de segment de droite) présente toujours juste deux phases: croissance et décroissance. » De même les aires des sections planes parallèles d'un ovoïde ne présentent, dans le cas le plus complet, que les trois phases de variation précédentes. « Si l'ovoïde est normal (c'est-à-dire si sa surface ne comporte ni facette plane, ni portion cylindrique), la variation se reduit juste à croissance puis décroissance. » Il est remarquable que, « si l'on remplace les aires des sections planes par leurs périmètres, la proposition de Brunn subsiste ». (On l'appele parfois le théorème de la pomme de terre.)

Le théorème de Helly date de 1921, mais on n'en a vu tout l'intérêt — aussi en analyse — que récemment: Si des ovales ont trois à trois un point commun, ils ont tous un point commun; il en est de même d'ovoïdes qui ont quatre à quatre un point commun. On en a déduit, par exemple, que si un ovale peut couvrir tout triplet d'un ensemble fini d'ovales, il peut les couvrir tous; en particulier si un cercle est un couvercle pour tout triplet d'un ensemble fini de points d'un plan, il est un couvercle pour tous.

Voyons maintenant quelques *opérations qui « transforment » un ovale en ovale, un ovoïde en ovoïde.* Soulignons d'avance qu'il ne s'agit pas de transformations ponctuelles:

La symétrisation.

1) D'un ovale par rapport à une droite Δ de son plan: on remplace toute corde perpendiculaire à cette droite par un segment de même support et de même longueur, centré sur elle. Cette symétrisation conserve l'aire de l'ovale et ne peut augmenter son périmètre.
2) D'un ovoïde par rapport à un plan P: dans la définition précédente on substitue P à Δ.
3) D'un ovoïde par rapport à une droite: on remplace toute section plane perpendiculaire à cette droite par un cercle de même plan et de même aire, centré sur elle.

Les symétrisations 2) et 3) ne peuvent augmenter la surface de l'ovoïde et conservent son volume (principe de Cavalieri).

Le tassement.

Tasser un ovale sur une droite Δ, c'est remplacer toute corde perpendiculaire par un segment AB de même support et de même longueur, de manière que tous les A soient sur Δ et tous les B du même côté de cette droite. Définition analogue pour le tassement d'un ovoïde sur un plan. Remarquons que le tassement d'un ovale étant un ovale, il en résulte le théorème de Brunn avec une précision supplémentaire:

Soit $C(X)$ la longueur d'une corde d'un ovale perpendiculaire à un axe $0X$, en fonction de son abscisse. Non seulement la

variation de $C(X)$ est au plus triphasée, mais encore $C(X)$ est une fonction convexe.

La combinaison linéaire $\Sigma a_i 0_i$ de plusieurs ovales ou ovoïdes est respectivement un ovale ou un ovoïde.

Précisons le sens de cette combinaison linéaire. Soit P un point fixe. Alors $a_i 0_i$ correspond à 0_i dans l'homothétie (P, a_i). Quant à $0' + 0''$, c'est l'ovale (ou l'ovoïde) constitué par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM''}$, où M' et M'' sont respectivement des points arbitraires de $0'$ et de $0''$. (Si on change le point fixe P, le corps convexe $\Sigma a_i 0_i$ subit simplement une translation). (2)

L'ovale $\dfrac{0 + (-0)}{2}$ a des propriétés remarquables: il a un centre de symétrie; il a mêmes diamètre, largeur et périmètre que 0; son aire ne peut être inférieure à celle de 0. De même l'ovoïde $\dfrac{0 + (-0)}{2}$ a un centre de symétrie, conserve le diamètre, la largeur et la surface de 0, et son volume ne peut être inférieur à celui de 0.

II. Quelques recherches personnelles récentes

Le trait commun aux théorèmes groupés dans ce chapitre est qu'ils me sont particulièrement familiers, soit parce que j'en ai donné une nouvelle démonstration, soit même parce que je les ai trouvés.

Le théorème des quatre sommets. — « Tout ovale, dont la courbure du contour est définie en chaque point, a au moins quatre sommets », c'est-à-dire que sa courbure passe par quatre extrema au moins. Cette proposition, aujourd'hui bien classique, a été trouvée en 1908 par l'Indien Mukhopadyaya. J'en ai donné une démonstration purement géométrique, dans un article intitulé « spirales et ovales ». (3)

Le théorème des deux tiers. — Appelons noyau d'un ovale son intersection avec le symétrique par rapport à son centre de

gravité (plaque homogène). « L'aire du noyau est supérieure ou égale aux deux tiers de celle de l'ovale; l'égalité n'est atteinte que par les triangles. » Je l'ai trouvé et démontré avec quelques restrictions en 1955 ([4]). Trois ans après il a été établi complètement par l'Américain Stewart et le Russe Kozinec, indépendamment l'un de l'autre.

Le théorème des quatre cinquièmes. — « Le rapport de la plus petite à la plus grande des deux aires découpées dans un ovale par une droite qui passe en son centre de gravité est supérieur ou égal à 0,8; l'égalité ne peut être atteinte que par un triangle. » Cette propriété a été découverte par Winternitz en 1923. J'en ai donné une nouvelle démonstration ([5]), puis, en 1955, j'ai trouvé et démontré la proposition analogue de l'espace: « Soit V le volume d'un ovoïde et v celui d'une portion détachée par un plan passant en son centre de gravité. Alors $\frac{v}{V} \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3$; l'égalité ne peut être atteinte que par un cône » ([6]). Dans ([4]) j'avais formulé la conjecture générale suivante: « Soit V la mesure d'un corps convexe à n dimensions et v celle d'une portion détachée par un hyperplan $(n-1)$-dimensionnel, passant en son centre de gravité. Alors $\frac{v}{V} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ». Cette conjecture a été démontrée en 1960 par Grünbaum ([7]) et par P. C. Hammer ([8]). Remarquons qu'il en résulte que $\frac{v}{V} > \frac{1}{e}$ quel que soit n (Le rapport critique est donc toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2{,}72}$).

Pour terminer je mentionnerai deux théorèmes concernant les corps convexes placés dans un réseau entier ([9]):

Généralisation du théorème de Minkowski. — Rappelons d'abord ce théorème fondamental de la géométrie des nombres. « Si un corps convexe à n dimensions a un centre de symétrie 0, appartenant à un réseau n-dimensionnel, et que sa mesure réticulaire est supérieure à 2^n, 0 n'est pas le seul point entier interne. Il existe une infinité de parallélotopes de mesure 2^n, dont le centre est le seul point entier interne. » Cette année ([10]) j'ai

indiqué les raisons pour lesquelles on peut très probablement remplacer dans cet énoncé « centre de symétrie » par « centre de gravité », si l'on remplace la mesure critique 2^n par $\frac{(n+1)^n}{n!}$ et le mot « parallélotope » par « simplexe ». En particulier je l'ai démontré pour $n = 2$ ([11]): « Si le centre de gravité d'un ovale est placé en un point entier 0 d'un réseau, dont une base est un carré de côté 1, et que son aire est supérieure à $\frac{9}{2}$, il renferme un point entier autre que 0; il existe une infinité de triangles d'aire $\frac{9}{2}$, dont le centre de gravité est le seul point entier intérieur. »

Théorème des points entiers. — Cette année également, j'ai établi dans *l'Enseignement Mathématique* ([12]) le résultat suivant: « Soient S et l l'aire et le périmètre d'un ovale situé dans le plan d'un réseau orthonormé, et j le nombre de points entiers situés dans l'ovale ou sur son bord. Alors $j \leqslant S + \frac{l}{2} + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des rectangles. » Dans la même note j'ai établi des bornes analogues pour le j d'un ovoïde. Mais je n'ai pu démontrer que pour certaines familles de corps convexes, l'intéressante conjecture suivante: « Soient V et S le volume et la surface d'un ovoïde, et a, b, c ses hauteurs dans la direction des axes d'un réseau orthonormé. Alors $j \leqslant V + \frac{S}{2} + a + b + c + 1$; l'égalité ne peut être atteinte que par des parallélépipèdes rectangles. » (A fortiori, si D désigne le diamètre de l'ovoïde, $j < V + \frac{S}{2} + 3D + 1$, borne non stricte, mais qui a l'avantage d'être invariante par rapport aux déplacements.)

III. Théorèmes curieux

Peut être vous rappelez-vous comme moi de l'étonnement qui fut le vôtre, le jour où pour la première fois on vous a parlé de la roue de Reuleau: il y a une infinité d'ovales, autres que le cercle, qui ont même hauteur dans toutes les directions. C'est que dans le domaine qui nous occupe, il faut se méfier tout parti-

culièrement de l'intuition. On s'en rend compte en essayant de répondre aux questions suivantes, dont on lira plus loin les réponses.

Questions :

1) Quels sont les ovoïdes dont toute section plane a un centre de symétrie ?
2) Quels sont les ovoïdes dont tous les contours apparents sont plans ?
3) Quels sont les ovoïdes (solides homogènes) qui restent en équilibre sur un plan horizontal en toute position ?
4) L'ellipse est-elle le seul ovale ayant un cercle orthoptique ?
5) Existe-t-il des ovales non circulaires ayant un point intérieur tel que toutes les cordes qui y passent soient égales ?
6) Existe-t-il un ovale ayant deux tels points ?

Réponses :

1) et 2) l'ellipsoïde seulement;
3) la sphère seulement;
4) non;
5) oui, une infinité pour chaque longueur donnée de la corde;
6) non.

IV. Théorèmes d'extrema

Tout le monde sait qu'à volume donné l'ovoïde de surface minimum est la sphère; cela ne signifie pas que la démonstration en soit facile.

A volume donné, l'ovoïde de plus petit diamètre est la sphère.

A volume et à hauteur donnés, quel est l'ovoïde de révolution de surface maximum? C'est un cylindre, un cône ou un tronc de cône, suivant la valeur du rapport $\frac{h^3}{V}$.

A largeur donnée, l'ovale de plus petite surface est le triangle équilatéral.

Le plus petit disque qui peut couvrir tout ovale de diamètre D a pour rayon $R = \frac{D}{\sqrt{3}}$.

Tout ovale a-t-il un cercle circonscrit minimum et un cercle inscrit maximum uniques? — Oui pour le premier, non pour le second. (Pour le deuxième pensons à un rectangle.)

Soit un arc de courbe de longueur donnée, s'appuyant en ses extrémités sur les deux côtés d'un angle fixe. Steiner a démontré que l'aire limitée par l'angle et l'arc est maximum, si l'arc est circulaire et centré au sommet de l'angle.

Inutile de dire que de nombreux problèmes sur les ovales et les ovoïdes sont encore ouverts, telle la question de Henri Lebesgue: quel est l'ovale, d'aire minimum, pouvant couvrir tous les ovales de même diamètre donné ?

Quelques démonstrations typiques

S'il n'y a pas de principe général pour aborder les problèmes des corps convexes, il y a cependant quelques méthodes de démonstration auxquelles on recourt fréquemment.

Le polygone convexe.

Si une propriété est démontrée pour tout polygone convexe, elle est vraie pour l'ovale, que l'on peut considérer comme un tel polygone de côtés infiniment petits. Le cas extrême est alors souvent le triangle. C'est de cette manière qu'on peut, par exemple, démontrer le théorème des quatre cinquièmes. On peut aussi comparer un ovale à un polygone. Ainsi pour démontrer le théorème des points entiers, on remplace l'ovale par le polygone qui est l'enveloppe convexe de ses points entiers intérieurs ou périphériques. (La démonstration complète dans ([12]) prend moins d'une page.)

La fonction continue.

Soit, par exemple, à démontrer que tout ovale admet au moins un carré circonscrit, c'est-à-dire formé par des droites supports. Prenons dans le plan orienté de l'ovale un axe fixe $\vec{\Delta}$. A une

direction $\vec{S}$ caractérisée par l'angle $(\vec{\Delta}, \vec{S}) = X$, correspond un rectangle circonscrit, dont les côtés parallèles et perpendiculaires à $\vec{S}$ ont pour longueurs respectivement a_0 et b_0. Quand $\vec{S}$ aura tourné de $\frac{\pi}{2}$, le rapport $\frac{a}{b}$, fonction continue de X, aura passé de $\frac{a_0}{b_0}$ à $\frac{b_0}{a_0}$. Il aura donc pris au moins une fois la valeur 1. ([13])

On peut démontrer de façon analogue, que tout ovale admet un carré inscrit; que tout point intérieur d'un ovale est le milieu d'une corde; qu'il existe une droite qui bissecte à la fois les aires de deux ovales donnés, ou un plan qui bissecte les volumes de trois ovoïdes donnés.

La récurrence.

Démontrons par exemple le théorème de Helly pour les ovales. Montrons d'abord qu'il est vrai pour quatre ovales 0_1, 0_2, 0_3, 0_4. Désignons par (ijK) le point commun à 0_i, 0_j, 0_K, et écartons le cas banal où trois de ces points seraient alignés. Alors ou bien trois des points — soit pour fixer les idées, (123), (134), (142) — déterminent un triangle, qui renferme le quatrième (234), ou bien les quatre points forment un quadrilatère convexe, soit par exemple (123) (234) (341) (413). On voit alors aisément que les quatre ovales ont en commun le point (234) dans le premier cas, le point d'intersection des diagonales dans le second. Supposons maintenant le théorème de Helly vrai pour n ovales, et considérons $n + 1$ ovales $0_1, 0_2 \ldots 0_n, 0_{n+1}$ ayant trois à trois un point commun. Désignons $0_n \cap 0_{n+1}$ par 0. Les quatre corps 0_i, 0_j, 0_n, 0_{n+1}, ayant trois à trois un point commun, ont tous un point commun, qui est aussi commun au triplet 0_i, 0_j, 0. Les n ovales $0_1, 0_2, \ldots, 0_{n-1}$, $0'$ ont donc trois à trois un point commun, et par suite ont tous un point commun, qui appartient aussi à 0_n et à 0_{n+1} .

Evidemment certaines démonstrations nécessitent des outils plus compliqués. Ainsi pour établir le théorème de Brunn sur les ovoïdes, on se sert de l'importante inégalité de Brunn-Minkowski: « Soient P', P, P'' trois plans sécants parallèles d'un ovoïde, se suivant dans cet ordre. Désignons par S', S, S'' les

aires des trois sections par h' et h'' les distances de P' et de P'' à P, et posons $h' + h'' = h$. Alors

$$h\sqrt{S} \geqq h''\sqrt{S'} + h'\sqrt{S''};$$

l'égalité n'est atteinte que si la portion de l'ovoïde comprise entre P' et P'' est un tronc de cône. "

Une classification des ovales ([14])

Considérons un ovale dont le contour a une courbure définie en chaque point ([15]) et ne comporte pas d'arc de cercle. On sait que ses sommets sont en nombre pair, les points de courbure maximum et minimum alternant. On peut alors classer l'ovale d'après le nombre de ses côtés, en appelant *côté* tout arc qui joint deux sommets à courbure maximum consécutifs. La forme de l'*ovale trilatère* (trois côtés) ou *quadrilatère*, par exemple, se rapproche de celle du triangle ou du quadrilatère. Le cercle étant écarté, le plus simple des ovales est *bilatère* (théorème des quatre sommets); l'ellipse en est un cas particulier.

Remarque.

Un ovale a une tangente en tout point, sauf éventuellement en un nombre fini de points anguleux. Même s'il ne présente pas de tels points, il peut avoir autant de points à courbure non définie que l'on veut. Pour le voir il suffit de penser à un ovale formé par $4n$ arcs, raccordés tangentiellement, qui sont prélevés alternativement sur deux cercles de rayons différents et ont tous pour mesure en radians $\frac{\pi}{2n}$.

Notion de spirale.

J'appelle ainsi tout *arc de courbe, dont la variation de la courbure est monotone.* Chaque côté d'un ovale se compose donc de deux spirales. Dans ([3]) j'ai établi un certain nombre de propriétés de la spirale, telles que: elle ne peut se recouper; en chacun de ses points le cercle de courbure la traverse; elle est située entièrement

dans la couronne que forment ses deux cercles de courbure extrêmes; si elle est intérieure au triangle formé par les tangentes en ses extrémités et leur corde de contact AB, la variation de l'angle $\widehat{AMB}$ inscrit dans la spirale est monotone.

En définitive, ne trouvez-vous pas que le sujet simple et un peu insolite de cet exposé ne manque pas d'intérêt ?

(1) Conférence faite aux Journées d'Etudes de l'A.P.M. (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) en février 1966 à Strasbourg.

(2) Les ovales du plan offrent un exemple intéressant d'un ensemble, muni de deux lois de composition externe et interne, qui ne forme pas un espace vectoriel. (En particulier $0+(-0)$ n'est pas égal à l'ovale nul.)

(3) *Revue de Mathématiques Spéciales*; octobre et novembre 1953.

(4) *Comptes Rendus*, 241, 1955, pp. 274-275.

(5) *Comptes Rendus*, 240, 1955, p. 483.

(6) *Comptes Rendus*, 240, 1955, p. 584.

(7) *Pacific J. Math.* 10, 1960, pp. 1257-1261 (« Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes »).

(8) *Mathematika* (« Volumes cut from convex bodies by planes »).

(9) Dans ma thèse, j'ai étudié entre autres les polyèdres convexes, dont les sommets ont des coordonnées entières ou rationnelles. (*Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire*, Grenoble, juin 1964).

(10) *Comptes Rendus*, 258, 1964, pp. 4885-4887 (Une généralisation probable du théorème fondamental de Minkowski).

(11) *Comptes Rendus*, 240, 1955, pp. 483-485.

(12) *Enseignement Math.*, fasc. 1-2 de 1964, pp. 138-146.

(13) Remarquons que ce raisonnement reste valable pour des courbes fermées non convexes.

(14) J'ai proposé cette classification en 1953 dans 3).

(15) On peut aussi admettre des points anguleux, en les considérant comme des sommets à courbure maximum (infinie), sans considération de courbure à gauche ou à droite. (On peut imaginer le raccord fait au point anguleux par un arc infiniment petit, dont le rayon de courbure tend vers zéro.)

(Reçu le 15 février 1965)

11, rue de Bruges
Strasbourg