

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 12 (1966)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLYGONES DE PÉRIMÈTRE MAXIMUM INSCRITS DANS UNE ELLIPSE
Autor: Loeffler, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40724>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES POLYGONES DE PÉRIMÈTRE MAXIMUM INSCRITS DANS UNE ELLIPSE

par A. LOEFFLER

THÉORÈME I. — Sur tout arc UV d'une ellipse $\mathcal{C}$ il y a un point X et un seul tel que le contour polygonal UXV soit maximum.

Démonstration. — Soient UMV et UNV les deux arcs de $\mathcal{C}$ sous-tendus par la corde UV . O désignant le milieu du segment UV , posons :

$$UO = OV = c > 0$$

Prenons O comme origine, et OV comme axe des x d'un système de coordonnées rectangulaires. λ désignant une valeur positive quelconque, l'équation :

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv \lambda^2 x^2 + (\lambda^2 + c^2) y^2 - \lambda^2 (\lambda^2 + c^2) = 0$$

représente l'une des ellipses homofocales qui ont U et V comme foyers.

Les extrémités A' et A du grand axe de $\mathcal{E}_\lambda$ sont sur l'axe des x , et extérieures à $\mathcal{C}$, puisque l'on a :

$$|\overline{A'O}| = |\overline{OA}| = \sqrt{\lambda^2 + c^2} > c.$$

Soient L le point de l'arc UNV situé sur l'axe des y , et $\overline{OB'}$ un segment variable de cet axe, de même sens que $\overline{OL}$. Posons $|\overline{OB'}| = \lambda$. Le point B' est une des extrémités du petit axe de l'ellipse $\mathcal{E}_\lambda$.

Supposons qu'on ait :

$$\lambda = |\overline{OB'}| < |\overline{OL}|.$$

Le point B' est alors à l'intérieur de $\mathcal{C}$. A' étant à l'extérieur de

cette courbe, l'arc $A'B'$ de $\mathcal{E}_\lambda$ rencontre $\mathcal{C}$ en un point S situé entre A' et B' . De même $\mathcal{E}_\lambda$ rencontre $\mathcal{C}$ en un point R situé entre B' et A .

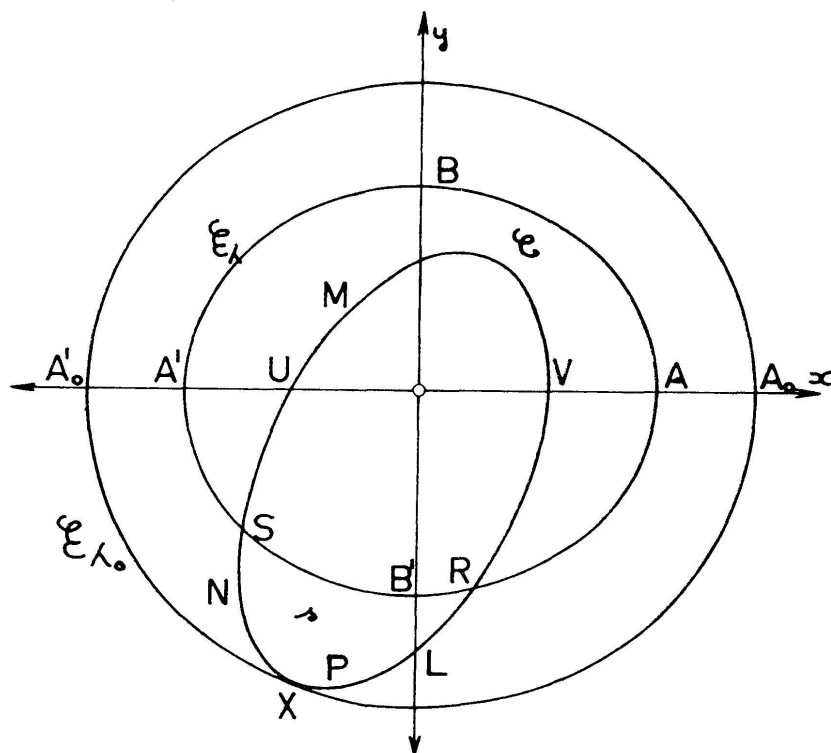


Fig. 1

Désignons par s la surface comprise entre l'arc RS de $\mathcal{E}_\lambda$ et l'arc SR de $\mathcal{C}$. Si l'on a: $\lambda_2 > \lambda_1$, on sait que l'ellipse $\mathcal{E}_{\lambda_2}$ enveloppe complètement l'ellipse homofocale $\mathcal{E}_{\lambda_1}$. Il s'ensuit que, si λ varie en croissant d'une manière continue, la surface s ira en diminuant. Elle n'existe plus pour des valeurs suffisamment grandes de λ pour lesquelles $\mathcal{E}_\lambda$ enveloppe $\mathcal{C}$. Il y a donc une valeur λ_0 de λ pour laquelle s se réduit à 0. Ceci n'est possible que si les deux points S et R sont confondus en un même point X ; et par suite $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en X . Il n'y a qu'une seule ellipse qui jouisse de cette propriété. Pour $\lambda < \lambda_0$, $\mathcal{E}_\lambda$ coupe s , et par suite aussi l'arc UNV en deux points R et S distincts. Pour $\lambda > \lambda_0$, $\mathcal{E}_\lambda$ enveloppant $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ enveloppe aussi l'arc UNV et ne peut ni le couper, ni lui être tangente.

Si $2a$ est la longueur du grand axe de $\mathcal{E}_{\lambda_0}$, on a: $UX + XV = 2a$, puisque X est sur $\mathcal{E}_{\lambda_0}$. Tous les points de l'arc UNV distincts du point X sont à l'intérieur de $\mathcal{E}_{\lambda_0}$. Donc, si P est un de ces points, on a: $UP + PV < 2a$, ou: $UX + XV > UP$

+ PV , ce qui démontre le théorème I. De la même manière on établit l'existence sur l'arc UMV d'un point unique Y tel que la longueur du contour $UY + YV$ soit maximum.

THÉORÈME 2. — *Sur tout arc UNV d'une ellipse $\mathcal{C}$ il y a toujours un point Z et un seul tel que l'angle UZV admette comme bissectrice intérieure la normale à $\mathcal{C}$ en ce point.*

En effet, supposons qu'il existe un pareil point Z . Considérons l'ellipse $\mathcal{E}$ dont les foyers sont les points U et V et qui passe par Z . On sait que la bissectrice intérieure de l'angle UZV est la normale à $\mathcal{E}$ au point Z . Mais, par hypothèse, cette bissectrice est aussi la normale à $\mathcal{C}$ en Z . Donc $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ ont la même tangente au point commun Z . On a vu, en démontrant le théorème I, que, parmi les ellipses de foyers U et V , il y en a une et une seule $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ qui soit tangente à l'arc UNV en un point X . D'après le théorème I, $\mathcal{E}$ se confond donc avec $\mathcal{E}_{\lambda_0}$ et Z avec X . On sait que ce point existe toujours et qu'il est unique. Le théorème est donc démontré.

Nous conviendrons de dire, par la suite, que le point X est le point d'impact sur l'arc UNV . En effet, on déduit du théorème 2 que si $\mathcal{C}$ est la bande d'un billard elliptique, X représente le point où une bille partant de U doit être renvoyée par la bande pour parvenir en V après avoir touché une fois l'arc UNV .

X est aussi le point où un rayon lumineux issu de U doit rencontrer $\mathcal{C}$ pour atteindre le point V après une seule réflexion sur l'arc UNV qu'on suppose être la projection orthogonale d'un miroir cylindrique.

Remarquons que si les points U et V sont permutés, le point X ne change pas.

DÉFINITION. — Etant donnés une ellipse $\mathcal{C}$ et un entier n supérieur à 2, nous dénommerons polygone σ_n de $\mathcal{C}$ tout polygone convexe de n côtés, inscrit dans $\mathcal{C}$ et tel que chacun de ses sommets soit le point d'impact de l'arc limité par les deux sommets voisins.

Il faut démontrer qu'il existe de pareils polygones quel que soit n . C'est ce que nous établirons à l'aide des deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 3. — *Etant donné un entier n , plus grand que 2, et une ellipse $\mathcal{C}$, il existe toujours une ellipse homofocale Γ_n et une seule, telle que l'on puisse inscrire dans $\mathcal{C}$ un polygone convexe de n côtés circonscrit à Γ_n .*

Démonstration. — Soient F et F' les foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$, et $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ son équation, où l'on suppose $0 < b < a$. Pour toute valeur de λ comprise entre 0 et b^2 , l'équation:

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv (b^2 - \lambda)x^2 + (a^2 - \lambda)y^2 - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0$$

représente l'une quelconque des ellipses homofocales qui sont intérieures à $\mathcal{C}$. Nous supposons que $\Delta\lambda$ est positif. On sait alors que l'ellipse $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$ est intérieure à $\mathcal{E}_\lambda$. Ayant choisi arbitrairement P , inscrivons dans $\mathcal{C}$ les deux lignes polygonales convexes de n côtés:

$\mathcal{L} = POQ \dots S$, circonscrite à $\mathcal{E}_\lambda$, et

$\mathcal{L}' = PO'Q' \dots S'$, circonscrite à $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$.

On entendra par $\widehat{PO}, \widehat{OQ}, \dots, \widehat{RS}; \widehat{PO'}, \widehat{O'Q'}, \dots, \widehat{R'S'}$, les plus petits des arcs de $\mathcal{C}$ sous-tendus par la corde correspondante, et on supposera qu'ils sont tous décrits dans un même sens choisi comme sens positif. Le point O' est situé sur le prolongement de l'arc PO , puisque PO' est tangente à $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$ qui est intérieure à $\mathcal{E}_\lambda$.

On a donc:

$$\widehat{OO'} > 0, \text{ et } \widehat{PO'} > \widehat{PO}.$$

Menons la corde $O'Q''$ de $\mathcal{C}$ tangente à $\mathcal{E}_\lambda$, et telle que l'arc $O'Q''$ soit positif. Si l'on imagine que la droite OQ roule sur $\mathcal{E}_\lambda$ jusqu'à coïncider avec la droite $O'Q''$, il est évident que l'arc QQ'' est positif puisque l'arc OO' l'est.

D'autre part, $O'Q'$ étant tangente à $\mathcal{E}_{\lambda+\Delta\lambda}$, donc sécante à $\mathcal{E}_\lambda$, on a: $\widehat{Q''Q'} > 0$. Donc l'arc POQ est plus petit que l'arc $PO'Q'$. En poursuivant ce raisonnement on obtient:

$$\widehat{POQ \dots S} < \widehat{PO'Q' \dots S'}$$

Si $s(\lambda)$ désigne la longueur de l'arc sous-tendu par $\mathcal{L}$, on a donc l'inégalité:

$$s(\lambda) < s(\lambda + \Delta\lambda)$$

Il s'ensuit que $s(\lambda)$ croît lorsque λ croît de 0 à b^2 .

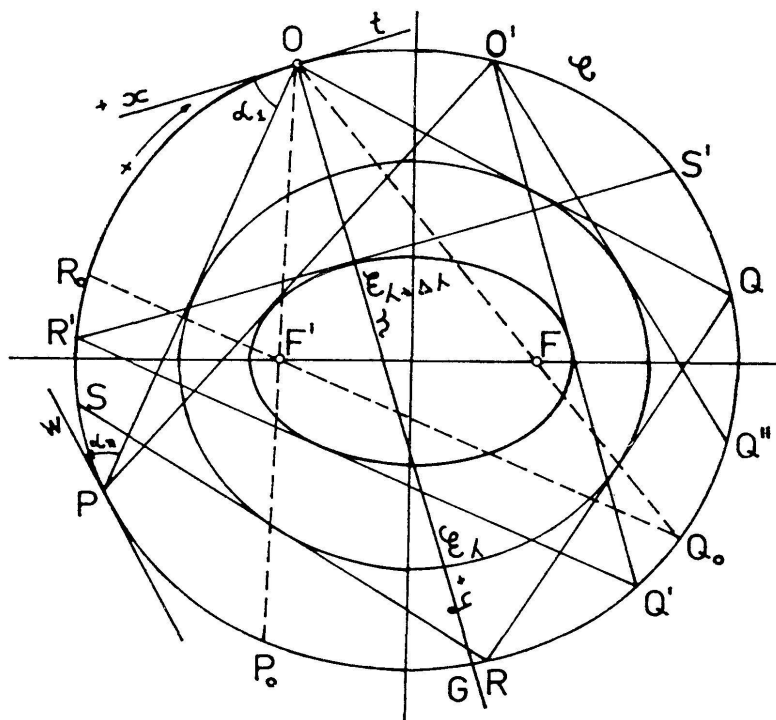


Fig. 2

Soit O un quelconque des sommets de $\mathcal{L}$. Si on rapporte $\mathcal{C}$ à la tangente t et à la normale n en O , son équation est de la forme:

$$y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + \delta y = 0$$

où l'on doit avoir: $\beta^2 - \gamma < 0$, puisque $\mathcal{C}$ est une ellipse, et par suite: $\gamma > 0$. On peut choisir sur t le sens de l'axe Ox de façon que

$\alpha_1 = \widehat{Ot, OP}$ soit un angle aigu. Sur l'axe des y , on choisira un sens tel qu'on ait: $\overline{OG} > 0$, où G désigne l'extrémité sur $\mathcal{C}$ de la normale n . De l'équation de C on tire: $-\overline{OG} = \delta < 0$, et, par la substitution:

$$x = OP \cos \alpha_1$$

$$y = OP \sin \alpha_1,$$

$$OP = - \frac{\delta \sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1 + 2\beta \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \gamma \cos^2 \alpha_1}$$

$$= (1 + m_1^2) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \frac{1}{T(\alpha_1)}$$

en posant: $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, et $T(\alpha_1) \equiv -\frac{1}{\delta} m_1^2 - \frac{2\beta}{\delta} m_1 - \frac{\gamma}{\delta}$. T est positif, quel que soit m_1 , et passe par un minimum $k_1 = \frac{\beta^2 - \gamma}{\delta}$

Quelle que soit la position de O sur $\mathcal{C}$, on a: $\beta^2 - \gamma = f < 0$, et $|\delta| = \overline{OG} < 2a = \text{grand axe de } \mathcal{C}$, donc $k_1 > \frac{-f}{2a} > 0$.

1. Si $\lambda \rightarrow 0$, en parcourant une suite de valeurs décroissantes, on voit, d'après leurs équations, que les ellipses $\mathcal{E}_\lambda$ correspondantes, dont chacune enveloppe la précédente, tendent d'une façon continue vers $\mathcal{C}$. Il s'ensuit que $\alpha_1 \rightarrow 0$. On voit que, en négligeant un infiniment petit du troisième ordre par rapport à α_1 , on peut écrire:

$$OP < \frac{\sin \alpha_1}{k_1} < \frac{2a \sin \alpha_1}{-f}$$

PO tend donc vers 0 avec λ , et il en est de même de l'arc PO , puisque $\frac{\widehat{PO}}{PO} \rightarrow 1$. On peut évidemment établir ce résultat pour chacun des n arcs sous-tendus par $\mathcal{L}$, et, comme n est fini, l'arc $POQ \dots S$ tend vers 0 avec λ . On peut donc dire, en particulier, que, si ω est la longueur du périmètre de $\mathcal{C}$, on a: $\widehat{POQ \dots S} < \omega$ lorsque λ est voisin de 0.

2. Si $\lambda \rightarrow b^2$, l'ellipse $\mathcal{E}_\lambda$ tend vers le segment rectiligne FF' , et on peut dire qu'à la limite toute tangente à $\mathcal{C}$ passera par F' ou F . Pour $n = 3$, la ligne polygonale $\mathcal{L}_0$ qui passe par O est formée des trois segments $P_0 O$, OQ_0 , $Q_0 R_0$, et la figure montre que l'arc qu'elle soustend $s_0 = \widehat{P_0 O} + \widehat{OQ_0} + \widehat{Q_0 R_0}$ est supérieur à ω . Ceci est vrai, a fortiori, pour $n > 3$.

En résumé, quel que soit l'entier n considéré, la longueur de l'arc s sous-tendu par la ligne polygonale $POQ \dots S$ varie, d'une valeur inférieure à ω , à une autre valeur supérieure à ω , en croissant constamment, lorsque λ croît de 0 à b^2 . L'équation $s(\lambda) = \omega$, admet donc une solution λ_n comprise entre 0 et b^2 , et une seule. Parmi les ellipses homofocales $\mathcal{E}_\lambda$, il y en a donc une et une seule $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ qui admette un polygone circonscrit de n côtés inscrit dans $\mathcal{C}$. Le théorème est donc démontré. On désignera par Γ_n l'ellipse $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ qu'on vient de trouver.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un polygone convexe, inscrit dans une ellipse $\mathcal{C}$ soit un polygone σ_n , il faut et il suffit qu'il soit circonscrit à une ellipse Γ_n qui a les mêmes foyers que $\mathcal{C}$.*

Démonstration. — 1. La condition est nécessaire. — En effet, soit L un polygone σ_n de $\mathcal{C}$. Considérons des sommets consécutifs P, O, Q, R de L . On sait qu'il existe une conique Γ_n et une seule qui a les foyers F et F' et qui est tangente au côté PO . Soit ON la normale à $\mathcal{C}$ en O . $\mathcal{C}$ étant une conique, on sait que ON bissecte l'angle FOF' . Il s'ensuit que ON bissecte aussi l'angle des tangentes à Γ_n issues de O , comme on le voit en remarquant que F et F' sont les foyers de Γ_n , et en appliquant un théorème connu. Or une de ces tangentes est OP . L'autre doit être OQ puisque, L étant un polygone σ_n , ON bissecte l'angle POQ . On voit de même que, si Γ_n est tangente à OQ , elle touche $QR \dots$ etc. ... Donc L est bien circonscrit à Γ_n .

2. La condition est suffisante. — En effet, soit L un polygone inscrit dans $\mathcal{C}$ et circonscrit à une conique homofocale Γ_n . Si P, O et Q sont trois sommets consécutifs de L , OP et OQ étant tangents à Γ_n , on sait que les angles POQ et FOF' ont une même bissectrice intérieure ON . O étant sur $\mathcal{C}$, la bissectrice intérieure de l'angle FOF' se confond avec la normale à $\mathcal{C}$ en O . Comme elle bissecte l'angle POQ , O est le point d'impact de l'arc POQ . L est donc un polygone σ_n . Le théorème 4 est ainsi démontré.

THÉORÈME 5. — Etant donnés un entier $n > 2$, et une ellipse quelconque $\mathcal{C}$, il existe une infinité de polygones σ_n de $\mathcal{C}$. Ces polygones sont tous circonscrits à une ellipse homofocale.

Démonstration. — On sait d'après le théorème 3 qu'on peut trouver à l'intérieur de $\mathcal{C}$ une ellipse homofocale Γ_n , telle qu'il existe un polygone convexe de n côtés inscrit dans $\mathcal{C}$ et circonscrit à Γ_n . D'après un théorème de Poncelet, il s'ensuit qu'il y a alors une infinité de polygones satisfaisant à ces deux conditions.¹

D'après le théorème 4 ce sont tous des polygones σ_n . Il n'y en a pas d'autres, car si L est un polygone σ_n de $\mathcal{C}$, il doit être circonscrit à une ellipse homofocale, en vertu du théorème 4, et d'après le théorème 3 cette ellipse ne peut être que Γ_n . Le théorème 5 est donc démontré.

Exemple. — Proposons-nous de déterminer les polygones σ_4 d'une ellipse $\mathcal{C}$ qu'on supposera donnée par son équation: $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$, dans un système d'axes rectangulaires. Soit $AA' = 2a$ le grand axe de $\mathcal{C}$, et $B'B = 2b$ son petit axe.

Le losange $A'B'AB$ est évidemment un des quadrilatères σ_4 de $\mathcal{C}$ puisqu'en chacun de ses sommets la normale à $\mathcal{C}$ est la bissectrice intérieure de l'angle du losange. L'ellipse Γ_4 est déterminée par ses foyers F' et F et par une de ses tangentes qui peut être l'un quelconque des côtés du losange. On peut facilement vérifier que:

$$\Sigma \equiv a^4 u^2 + b^4 v^2 - (a^2 + b^2) w^2 = 0$$

est l'équation tangentielle de Γ_4 . En effet:

1. $\Sigma = 0$, si $u = \pm b$; $v = \pm a$; $w = -ab$. Ceci montre que la conique Σ est tangente aux quatre côtés du losange qui ont comme équations: $\pm bx \pm ay - ab = 0$.

2. $\Sigma = 0$, si $u = \pm i$; $v = 1$; $w = \pm ic$. Ceci montre que Σ est tangente aux droites isotropes issues de F et de F' , et qu'elle a par suite ces points comme foyers. Donc $\Sigma = 0$ est bien l'équation tangentielle de Γ_4 .

Soit $MNOP$ un quadrilatère σ_4 de $\mathcal{C}$. On sait que tous ses côtés sont tangents à Γ_4 , et que ses sommets sont des points de $\mathcal{C}$. Soient V , W , Y et Z les pôles respectifs de PM , MN , NO et OP

¹ Voir J. V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*. Tome I-565-566. Gauthier-Villars (1865).

points sont situés sur $\mathcal{K}$, puisque de chacun d'eux, on voit $\mathcal{C}$ sous un angle droit. Soient N et P les points de contact des deux dernières tangentes. La figure montre que MN est la polaire de W par rapport à $\mathcal{C}$. W étant sur $\mathcal{K}$, MN est tangente à Γ_4 , puisque Γ_4 est la transformée de $\mathcal{K}$ par polaires réciproques, par rapport à $\mathcal{C}$. De même on voit que NO , OP et PM sont tangentes à Γ_4 . D'après le théorème 4, le quadrilatère $MNOP$ est donc un polygone σ_4 de $\mathcal{C}$.

On peut aussi déduire de la figure que tous les quadrilatères σ_4 de $\mathcal{C}$ sont isopérimètres.

Pour le montrer, remarquons d'abord que MO et PN sont des diamètres de $\mathcal{C}$ qui ont chacun comme milieu le centre I de cette conique. Le quadrilatère $MNOP$ est donc un parallélogramme.

V étant le pôle de MP , et Y le pôle de NO , la droite VY est la polaire du point d'intersection de MP et NO . Ce point étant à l'infini, VY passe par I et coupe les segments MP et NO en leurs milieux G et H . On en déduit: $MN \parallel VY$.

Si $2p$ est le périmètre de $MNOP$, on a: $p = MN + MP$.

Soit L le point où le prolongement de NM coupe celui de ZV . $MNOP$ étant un polygone σ_4 , la tangente VM bissecte l'angle LMP , et l'on a:

$$LM = MP.$$

Donc: $p = NM + MP = NM + LM = LN$. D'autre part, on a: $MN \parallel VY$, donc $LN \parallel VY$, et $LV \parallel NY$.

On en tire: $p = LN = VY = \text{diamètre de } \mathcal{K} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Donc tous les quadrilatères $MNOP$ ont le même périmètre $2p = 4\sqrt{a^2 + b^2} = \text{constante}$.

La proposition qu'on vient de démontrer sur les polygones σ_4 n'est qu'un cas particulier du théorème suivant:

THÉORÈME 6. — *Si deux ellipses homofocales sont telles qu'il existe deux polygones convexes de n côtés inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre, ces polygones sont isopérimètres.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{C}$ et Γ les ellipses de l'énoncé, Γ étant intérieure à $\mathcal{C}$. On sait que, si, d'un point P de $\mathcal{C}$, on mène les deux tangentes PA et PB à Γ , la différence $PA + PB - \text{arc}$

Supposons que $\mathcal{P}$ ne soit pas un polygone σ_n .

On déduit alors de cette hypothèse qu'il y a au moins un des sommets de $\mathcal{P}$ qui n'est pas un point d'impact. Soit V un pareil sommet. Si V' est l'impact de l'arc UVW de $\mathcal{C}$, on a, d'après le théorème I:

$$UV + VW < UV' + V'W.$$

En désignant par $\mathcal{P}'$ le polygone obtenu en remplaçant, dans $\mathcal{P}$, le sommet V par V' , on tire de l'inégalité précédente:

$$\text{périmètre de } \mathcal{P} < \text{périmètre de } \mathcal{P}',$$

ce qui ne peut être puisque $\mathcal{P}$ a un périmètre maximum. Donc l'hypothèse est fausse, et $\mathcal{P}$ est un polygone σ_n . c.q.f.d.

On peut, d'autre part, établir la proposition suivante:

THÉOREME 8. — *Tout polygone convexe de n côtés inscrit dans $\mathcal{C}$ a un périmètre de longueur inférieure ou au plus égale à p_n .*

La démonstration que nous avons trouvée de cette proposition est longue et laborieuse, et il paraît préférable d'attendre qu'on ait eu l'idée d'une démonstration plus simple pour l'exposer.

L'existence des polygones σ_n ayant été bien établie, on voit qu'on peut déduire des propositions précédentes la conclusion suivante:

Parmi tous les polygones convexes de n côtés inscrits dans une ellipse $\mathcal{C}$ il y en a une infinité qui admettent un périmètre maximum. Ils sont isopérimètres, circonscrits à une ellipse homofocale, et ils admettent en chaque sommet la normale à $\mathcal{C}$ comme bissectrice intérieure.

Chemin de la Fontanettaz 8
Pully-Rosiaz, Vaud.

(Reçu le 24 mai 1965)