Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE
REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON
RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE

Autor: Young, L. C.
Kapitel: 4. RÔLE DE LA FRONTIÈRE.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39977>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

4. RÔLE DE LA FRONTIÈRE.

Nous avons retrouvé, sous une forme nouvelle, un fait bien connu: c'est que la solution générale d'un système d'équations différentielles n'est que le premier pas dans l'étude de ce système. Un des éléments les plus importants d'une telle étude sera le rôle de la frontière. Celle-ci ne peut être entièrement prescrite, dans le cas qui nous occupe, d'un système du premier ordre, mais on peut lui imposer certaines conditions restrictives, par exemple des conditions initiales. On peut aussi lui imposer des conditions qui n'ont rien de numérique, et de telles conditions sont précisément sous-entendues dans toute l'Analyse classique. Pour $k = 1$, il était coutume de n'admettre que des frontières se réduisant à deux extrémités, donc à un seul cycle. L'analogie avec la situation pour $k > 1$ en souffrait: car dans celle-ci les nécessités géométriques avaient bientôt forcé l'admission des frontières formées d'un nombre fini quelconque de cycles.

Or ces frontières-là sont encore très particulières. Il est malcommode d'avoir à se borner à elles, car déjà l'intersection d'un demi-espace avec une variété très simple n'aura pas toujours une telle frontière. C'est l'intuition géométrique qui servait à faire définir la notion de frontière, et c'est d'elle que nous viennent de pareilles restrictions. Elles n'ont plus la même raison d'être dans une théorie abstraite.

La frontière d'une variété généralisée $\mathcal{L}$, ou d'un courant T , se laisse définir sans qu'il soit besoin de recourir à des hypothèses simplificatrices. On la définit comme la restriction de la fonctionnelle $\mathcal{L}(f)$, ou $T(f)$, à une sous-classe bien déterminée d'intégrants, ou de formes différentielles, f : celle dont les membres sont exacts. On appelle exacte une forme k -dimensionnelle qui se laisse exprimer comme la différentielle dg d'une forme g de dimension $k - 1$. Des formes exactes, on passe d'une manière évidente aux intégrants exacts, la distinction étant purement verbale. Si les formes f, g sont sujettes à la relation $f = dg$, on dira des intégrants f_0, g_0 correspondants que f_0 est la dérivée Dg_0 de g_0 .

Puisque nous possédons, maintenant, une définition de la frontière tout à fait générale, nous sommes à même de nous

passer des hypothèses mal commodes, et plus ou moins implicites, de l'Analyse classique. Néanmoins, parmi les solutions, si générales, de (2.1) ou de son analogue k -dimensionnelle, il va falloir étudier celles qui possèdent une frontière pas trop irrégulière, que nous nommerons frontière A .

Une frontière A est, par définition, la frontière d'un σ -polytope avec poids, c'est-à-dire celle d'une variété généralisée $\mathcal{L}$ se laissant exprimer comme une somme au plus dénombrable $\sum c_\nu \mathcal{L}_\nu$, où les c_ν sont réels et positifs — ce sont eux que nous appelons les poids — et où chaque $\mathcal{L}_\nu$ est une fonctionnelle $\mathcal{L}_\nu(f)$ définie par une intégrale k -dimensionnelle de f sur un simplex orienté, de même dimension. A la place de σ -polytope avec poids, nous dirons σ -polytope (tout court), lorsque les c_ν sont des entiers; en outre, nous omettrons le préfixe σ lorsque la somme $\sum c_\nu \mathcal{L}_\nu$ est finie.

Les notions classiques de frontière peuvent être considérées comme des cas particuliers d'une frontière A . Ce ne sont pas les seules: chaque espèce de frontière qu'on ait admise jusqu'ici, dans la théorie des équations différentielles ou dans le calcul des variations, peut être regardée comme un cas particulier, soit d'une frontière A , soit, dans certains contextes, d'une classe de frontières A . En outre, nous avons montré ailleurs [12] que les frontières A constituent un espace linéaire métrisable complet, et que les variétés généralisées, à frontière A , constituent la fermeture, dans une topologie métrique convenable, de la classe des polytopes avec poids, ou ce qui revient au même, la hulle convexe de la classe des polytopes, ou polyèdres ordinaires.

Dans le même travail, nous avons démontré une propriété des frontières A qui sera pour nous décisive, puisque nous allons envisager les solutions lagrangiennes comme des mélanges de solutions plus simples. D'après ce qui a été dit, ces solutions plus simples auront sans doute des frontières A , sans quoi leur simplicité serait illusoire. Or nous avons montré [12 Ap. III] que la propriété de posséder une frontière A se conserve sous l'opération du mélange. Il s'en suivra que les solutions lagrangiennes devront posséder une frontière A .

C'est la réciproque que nous voudrions étudier: les solutions de frontière A sont-elles lagrangiennes ?