4. Equations diophantiennes de degré supérieur

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

3. Analyse indéterminée du premier degré

L'arithmétique de Diophante a introduit un symbolisme algébrique et l'usage d'équations. La résolution de ces équations était dominée par la préoccupation de *tomber juste*.

Ce traité a eu une longue influence sur le développement des mathématiques, grâce à l'édition de Bachet de Meziriac (1621); cet auteur a également publié un ouvrage personnel consacré à des questions analogues: Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Quelques années plus tard (1670), le fils de Pierre de Fermat publiait les annotations transcrites dans les marges d'un exemplaire de l'Arithmétique de Diophante par son père; elles comportaient des énoncés de propriétés nouvelles et parfois des solutions de problèmes.

Quoiqu'il en soit, on appelle *problèmes diophantiens* (ou diophantiques) la recherche des solutions en nombres entiers ou en nombres rationnels des équations à cœfficients entiers ou rationnels.

On appelle aussi l'ensemble de ces problèmes *analyse indéterminée*.

Le cas d'une équation, ou d'un système d'équations, du premier degré est presque complètement résolu.

L'étude de $ax+by = c$, a, b, c, entiers donnés, x, y entiers inconnus, est liée à la divisibilité, mais aussi à l'ensemble des nombres de la forme $ax+by$, qui sont des multiples du p.g.c.d. de a et b. On peut aussi interpréter l'étude de ce dernier ensemble par celle des *réseaux de points, ce qui conduit aux fractions continues et aux substitutions unimodulaires*. Ces questions ont été abordées par Bachet, Fermat, Euler, Lagrange.

L'étude des systèmes d'équations peut être faite par des méthodes analogues; elle a été développée par Gauss, Poinsot, Smith, Frobenius, Heger.

Bibliographie: 7, 8, 9, 12, 41.

4. Equations diophantiennes de degré supérieur

Les équations diophantiennes de degré supérieur sont de types très divers; par exemple (équations non homogènes):

$$p = x^2+y^2\,; \qquad x^2-dy^2 = 1\,; \qquad x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$$

ou (équations homogènes):

$$x^2+y^2 = z^2, \qquad y^2 z - x^3 = 0, \dots$$

Une première catégorie de problèmes est la recherche des *points à coordonnées entières*, ou *à coordonnées rationnelles* (en abrégé points entiers, ou points rationels) sur des courbes algébriques à cœfficients entiers.

Par exemple: recherche de x, y, z entiers tels que:

$$x^2+y^2 = z^2$$

(points rationnels sur un cercle); $x/y = t$ est rationnel et x/z, y/z s'en déduisent par les formules:

$$\frac{x}{z} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \frac{y}{z} = \frac{2t}{1+t^2}$$

ou encore x, y, z sont proportionnels à

$$\lambda^2 - \rho^2, \qquad 2\lambda\rho, \qquad \lambda^2+\rho^2$$

avec λ, ρ entiers premiers entre eux.

Plus généralement, on peut chercher les points entiers, ou les points rationnels, sur des *surfaces*, ou sur des *variétés algébriques* déterminées par des relations à cœfficients entiers.

Ces problèmes ont donné lieu à de nombreuses recherches dispersées et à des solutions de fortune, notamment de FERMAT, EULER, LAGRANGE. Des recherches plus systématiques ont été entreprises dans ces dernières années, surtout par H. POINCARÉ et A. WEIL.

Bibliographie: 4, 12, 15, 23, 29, 33, 38, 41.

5. CONGRUENCES ET CORPS FINIS

L'étude du problème de Fermat ont conduit EULER, LAGRANGE, LEGENDRE, JACOBI à établir une théorie qui a été mise au point par GAUSS. Elle a été exposée dans les Disquisitionnes arithméticæ parus en latin en 1801 et traduite depuis en français.