

# L'ANALYSE ET BOURBAKI

Autor(en): **Choquet, Gustave**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37956>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# L'ANALYSE ET BOURBAKI <sup>1</sup>

par Gustave CHOQUET

Le titre de cette étude laisse espérer et craindre à la fois que j'ai le projet aventureux de lire les pensées de cet être polycéphale qui se nomme BOURBAKI.

En fait, c'est de l'ensemble de l'Analyse moderne que je veux parler, mais BOURBAKI a maintenant des conceptions si clairement cristallisées, et il est tellement mêlé au développement des Mathématiques de notre temps qu'on peut espérer, en étudiant ses œuvres, philosophiques et mathématiques, saisir dans un grand état de pureté l'essentiel des tendances de l'Analyse moderne.

Une telle étude pourra ensuite nous aider à mieux concevoir un enseignement de l'Analyse à tous les niveaux, qui soit adapté à notre temps.

## LA MÉTHODE AXIOMATIQUE

L'étude du développement historique des mathématiques montre assez nettement qu'après chaque période de recherches en extension vient une période de synthèse, où des méthodes générales sont élaborées, et l'édifice mathématique basé plus solidement. C'est ainsi que la synthèse de Descartes vint couronner une longue période de recherches en apparence très variées, et permit de reléguer dans le musée des curiosités une multitude de procédés d'étude de courbes et fonctions particulières.

Aujourd'hui le nombre des mathématiciens est tel que ces deux tendances peuvent coexister; toutefois l'œuvre de synthèse des cinquante dernières années, rendue possible par la création de la théorie des ensembles et de son langage est particulièrement

---

<sup>1</sup>) Conférence donnée au Séminaire organisé par la C.I.E.M. à Lausanne, le 26 juin 1961.

remarquable; elle s'est nettement concrétisée chez BOURBAKI, et c'est là que je veux l'étudier.

Pour BOURBAKI il n'y a plus désormais qu'une *Mathématique* et l'outil essentiel de cette évolution vers l'unité a été la *méthode axiomatique*.

Pour appliquer cette méthode à l'étude d'une théorie, le mathématicien « *dissocie* les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent; puis, prenant chacun d'eux isolément, et le posant en principe abstrait, il déroule les conséquences qui lui sont propres; puis, revenant à la théorie étudiée, il en *combine* de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudie comment ils réagissent les uns sur les autres » (BOURBAKI).

On retrouve dans cette analyse, mais sous une forme plus structurée, l'un des principes de base de Descartes: Diviser chaque difficulté en autant d'éléments qu'il est nécessaire.

Les « ressorts principaux des raisonnements » constituent les *structures*:

Par exemple l'ensemble  $R$  des nombres réels possède des structures variées: Structures de groupe, de corps, d'espace vectoriel, d'ordre, d'espace topologique.

Inversement une même structure peut se retrouver dans plusieurs théories distinctes; par exemple la structure de groupe se retrouve dans l'étude de  $R$ , des entiers modulo  $p$ , des déplacements de l'espace.

Pour que l'étude d'une structure puisse s'appliquer à des théories variées, les ensembles étudiés doivent donc être très généraux; en particulier la nature de leurs éléments constitutifs ne doit pas intervenir; seules doivent compter les relations qui existent entre ces éléments; celles-ci sont clairement précisées dans les *axiomes* qui définissent la structure.

Par exemple, une structure d'ordre sur un ensemble quelconque  $E$  sera une relation binaire sur  $E$ , notée  $<$ , satisfaisant aux axiomes suivants:

Pour tous  $x, y, z$  appartenant à  $E$ , on a:

- (1)  $x < x$ ;
- (2)  $(x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow (x = y)$ ;
- (3)  $(x < y \text{ et } y < z) \Rightarrow (x < z)$ .

Certaines de ces structures ont une importance fondamentale puisqu'on les retrouve dans toutes les théories, ce sont les *structures-mères*: structures associées à une relation d'équivalence, structures d'ordre, structures algébriques, structures topologiques, etc...

Ces structures-mères sont d'ailleurs plus ou moins riches; par exemple, une structure de groupe abélien fini et une structure de corps sont plus riches qu'une structure de groupe quelconque.

D'autres structures, déjà plus complexes, font intervenir plusieurs structures-mères, liées entre elles par des conditions de compatibilité, ce sont les *structures multiples*. Par exemple, un groupe topologique est muni à la fois d'une structure de groupe et d'une structure topologique, compatibles en ce sens que les opérations  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  et  $x \rightarrow x^{-1}$  sont continues.

L'algèbre topologique, la topologie algébrique, étudient des structures multiples; la géométrie différentielle, l'algèbre différentielle étudient des structures plus riches encore.

Enfin, au sommet de l'édifice, apparaissent les *structures-carrefour*, qui font intervenir de très nombreuses structures. La théorie du potentiel est un excellent exemple d'une telle structure. La multiplicité des structures-mères qui interviennent dans de telles théories explique l'intérêt que leur portent des mathématiciens très variés; chacun des progrès réalisés dans l'étude des structures constituantes se répercute sur la théorie. C'est ainsi que les progrès de la théorie du potentiel correspondent à des progrès de théories variées, intégrale de Lebesgue, espaces topologiques, espaces vectoriels topologiques, mesures de Radon, groupes abéliens localement compacts, distributions, etc...

De telles structures sont le véritable domaine de l'analyste; aussi définirons-nous l'*Analyse* comme l'ensemble des structures-carrefours. Ces dernières n'ayant pas été définies de façon rigide, les domaines-frontière sont nombreux; notre définition n'établit qu'une hiérarchie. Une théorie *A* relève plus de l'Analyse qu'une théorie *B* si les structures étudiées dans *A* sont plus riches que celles étudiées dans *B*.

L'Analyse apparaît donc comme un monde dont la complexité rappelle celle de la Vie. Alors que l'Algèbre est un monde

minéral dont les beautés sont des cristaux aux formes pures, l'Analyse est peuplée d'êtres aux contours parfois imprécis, algues marines, hydres ou éponges; c'est une jungle exubérante qu'on peut explorer de multiples façons et où chacun peut imprimer au domaine qu'il défriche le cachet de sa personnalité.

### *Caractères de la méthode axiomatique*

1. Le développement récent des mathématiques et celui de l'industrie présentent des analogies intéressantes:

La méthode axiomatique est une taylorisation; les structures-mères sont nos machines-outils.

La méthode axiomatique apporte une *économie de pensée et de notations*; les énoncés importants qu'on utilise partout sous des formes variées sont démontrés une fois pour toutes, dans un système d'axiomes assez général pour englober tous les cas utiles; on choisit avec soin dans ce cadre une terminologie et des notations qui puissent être utilisées dans les divers cas particuliers, en donnant la préférence aux mots suggestifs, qui évoquent des résonnances, éveillent l'intuition.

Ce soin dans le choix de la terminologie va de pair avec un souci de clarté dans la rédaction; les mathématiciens modernes ont un style précis et dépouillé; ils se plaisent à dégager le squelette de leurs exposés en les découpant en définitions, lemmes, théorèmes, corollaires, remarques et mises en garde (S!).

2. Les premiers systèmes axiomatiques étaient *univalents* (axiomatique de la géométrie élémentaire d'Euclide-Hilbert, définition des entiers naturels par Péano); par contre, les structures fondamentales sont *multivalentes*, c'est-à-dire que les axiomes qui les définissent s'appliquent à de vastes classes d'ensembles structurés non isomorphes.

Cette multivalence garantit leur adaptation à des situations très variées; aussi est-il parfois difficile de dire si un énoncé est de l'Algèbre, de la Géométrie ou de l'Analyse:

Ainsi la géométrie élémentaire de l'espace n'est autre que l'algèbre linéaire sur un espace vectoriel à trois dimensions muni d'un produit scalaire; et l'étude des formes quadratiques sur cet espace équivaut à l'étude des coniques du plan.

De même, étudier l'espace de Hilbert c'est, bien sûr, faire de la géométrie (sphères, angles, perpendiculaires); mais c'est aussi faire de l'algèbre et de l'analyse; par exemple, pour H. CARTAN, le balayage en théorie du potentiel n'est autre qu'une projection orthogonale sur un cône convexe d'un espace de Hilbert; plus généralement, les ensembles convexes appartiennent bien à la géométrie; mais, dans les espaces vectoriels topologiques, ils constituent un des outils de base de l'analyste.

La multivalence des grandes structures est donc un facteur d'unité, qui permet un enrichissement mutuel des diverses théories mathématiques. Pareil phénomène n'est pas nouveau: Rappelons le rôle de la représentation géométrique plane des nombres complexes, la synthèse entre géométrie et algèbre opérée par Descartes, l'appui que les recherches d'Analyse de Monge ont trouvé dans la géométrie. Mais, grâce à l'algèbre des ensembles et à son langage universel, ce phénomène s'est considérablement amplifié; citons seulement quelques exemples caractéristiques:

— La topologie de Zariski en géométrie algébrique.

— Interprétation et démonstration topologique de plusieurs théorèmes importants de logique.

— La théorie des faisceaux qui, née en topologie algébrique (J. LERAY), envahit maintenant l'Algèbre et l'Analyse.

3. De cette multivalence résulte aussi qu'on n'étudie plus un être isolé, mais des familles d'êtres ayant entre eux des relations. Aussi, non seulement les énoncés acquièrent une vaste généralité, mais chaque être individuellement est mieux connu, car ses relations avec d'autres êtres mettent en valeur ses divers aspects. Ici encore, ce qui est nouveau n'est pas cette utilisation d'un « contexte », c'est la prise de conscience du phénomène et son ampleur:

Depuis longtemps une tangente à une courbe était définie au moyen d'une famille de sécantes, les propriétés des fonctions analytiques dans le domaine réel étaient éclairées par leur étude dans le domaine complexe, et les « familles normales » de fonctions analytiques constituaient déjà un outil puissant.

Les mathématiques modernes sont donc « relationnelles », d'où un *dynamisme* interne, dont le vocabulaire et la présentation typographique mêmes sont un reflet: Applications, injections, jets, sources, flèches et schémas fléchés.

Un symbolisme commode a été créé pour noter relations et transformations:

$$x \rightarrow f(x); A \rightarrow \bar{A}; x \sim y; x < y; A \times B, \prod A_i, E/R, \text{ etc.}$$

Entre les mains du mathématicien les êtres se transforment, comme une gemme brute entre les mains d'un joaillier, et chacune des transformations qu'il leur impose en révèle, telle une facette nouvelle, un aspect inattendu.

Cet aspect relationnel est en accord avec le principe connu que, pour bien connaître une notion, il faut en étudier les variations, les contraires; il est aussi en accord avec un principe qui semble dominer toute la recherche scientifique moderne: C'est qu'on n'atteint pas l'« essence » des êtres, on ne peut espérer connaître que les relations des êtres entre eux: Une expérience de physique révèle une relation entre l'univers et un dispositif expérimental; l'essentiel d'une installation téléphonique n'est pas la nature ou la forme des fils conducteurs, mais le schéma de l'installation; et, pour le mathématicien, deux ensembles structurés isomorphes sont équivalents.

La virtuosité avec laquelle les jeunes mathématiciens formés aux méthodes nouvelles utilisent le dynamisme des relations, le plaisir qu'ils en retirent, semblent prouver que ce dynamisme est adapté à la structure du cerveau humain.

4. La multivalence des théories garantit une plus grande possibilité d'utilisation par la physique: L'espace de Hilbert s'est prêté aux interprétations de la théorie quantique des champs; la géométrie des espaces de Riemann et le calcul différentiel extérieur ont fourni le cadre de la relativité générale. La physique théorique moderne se développe d'ailleurs, elle aussi, de façon axiomatique; on y part de quelques faits fondamentaux qu'on traduit en axiomes, et on en déduit des conséquences dont on cherchera plus tard des vérifications expérimentales, tout en sachant très bien que les axiomes choisis ne traduisent qu'un aspect du monde physique.

5. Une bonne axiomatique est souvent le seul moyen de sortir de difficultés métaphysiques. Ainsi les nombres complexes n'ont perdu leur mystère et leur caractère « absurde » que le jour où l'on a identifié leur ensemble à  $R^2$  muni de deux opérations clairement explicitées. Plus près de nous, le point de départ du calcul des probabilités a été longtemps noyé dans la brume, à l'époque où la théorie avait encore trois centres: théorie des jeux, théorie des erreurs, théorie stochastique. Le calcul des probabilités n'a trouvé son unité et des fondements solides qu'avec l'axiomatique de Kolmogorov; il apparaissait dès lors comme une branche de la théorie de la mesure, mais une branche particulièrement vigoureuse, avec son langage et ses problèmes et il pouvait, à la fois s'enrichir des méthodes et résultats de la théorie de la mesure, et féconder l'Analyse classique: Les relations étroites entre la théorie du potentiel et les processus de Markov mises en évidence ces dernières années en sont une brillante illustration.

### *Dangers de la méthode axiomatique*

Si les systèmes axiomatiques sont les machines-outils des mathématiques, on conçoit qu'ils ne soient intéressants que si leur rendement est bon. Il est relativement facile de construire des systèmes axiomatiques, ne serait-ce qu'en modifiant légèrement des systèmes connus; le nombre de thèses et travaux ainsi construits est malheureusement fort grand; leur mise au point a en général donné beaucoup de plaisir à leur auteur, ce qui le conduit à leur attacher une importance démesurée. Beaucoup de ces grandes théories n'ont qu'une maigre application ou pas d'application du tout.

Une question urgente se pose donc: Quels sont les systèmes axiomatiques utiles? Il n'y a probablement aucun critère absolu qui permette d'en décider; toutefois on peut admettre qu'il ne faut pas utiliser « un pavé pour écraser une mouche »; une théorie générale sera justifiée si elle révèle des liens inattendus et féconds entre théories jusque-là étrangères en apparence, ou si elle apporte la solution d'un problème non résolu. Le fait qu'une



théorie générale s'applique à de nombreux cas n'implique d'ailleurs pas qu'elle soit utile, si la lumière dont elle les éclaire est trop maigre.

*Un garde-fou, les grands problèmes.* — Nous verrons plus loin avec quelle exigence BOURBAKI a trié les théories qui ont droit de cité dans son œuvre didactique. Mais il est intéressant d'étudier quel est, pour BOURBAKI, le garde-fou qui va le protéger de la tentation de développer, comme un but en soi, des systèmes axiomatiques.

Pour André WEIL, « si la logique est l'hygiène du mathématicien, le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes ».

C'est redire ce que disait déjà HILBERT: « Une branche de la science est pleine de vie tant qu'elle offre des problèmes en abondance; le manque de problèmes est signe de mort. »

HILBERT est d'ailleurs, pour BOURBAKI, un modèle et presque un père, et il est intéressant de savoir ce que le fils pense du père. Les Bourbakistes admirent l'élégance et la simplicité de ses travaux » due à ce qu'il a dégagé de la gangue où nul n'avait su les voir, les principes fondamentaux qui permettent de tracer vers la solution la route royale vainement cherchée jusque-là ». C'est un maître de l'axiomatique — qu'il s'agisse de structure univalente (géométrie élémentaire) ou multivalente — et il a appris aux mathématiciens à penser axiomatiquement. « Mais jamais il ne tombe dans le travers de certains disciples: Créer une grande théorie pour quelques maigres applications et généraliser pour le plaisir de généraliser. » (DIEUDONNÉ.) Il a la passion du problème spécial, précis et concret; c'est pour résoudre de tels problèmes qu'il a forgé des outils dont l'importance n'a pas diminué: Méthode directe en calcul des variations, basée sur la semi-continuité, pour résoudre le problème de Dirichlet; définition et utilisation de l'« espace de Hilbert » pour la résolution d'équations intégrales, etc...

Les grands problèmes qu'il a signalés à l'attention des mathématiciens au Congrès de 1900 n'ont pas cessé de stimuler des recherches fécondes; on continue, par exemple, à multiplier les attaques du problème de Riemann sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et la véritable nature de ce problème semble encore inconnue.

## QUELQUES-UNS DES OUTILS DE L'AXIOMATIQUE

Lors de l'étude d'une structure, le mathématicien moderne est amené à utiliser des structures auxiliaires; pour les construire, il a besoin d'un guide qui l'oriente vers les bonnes définitions. Nous examinerons ici quelques procédés qui ont fait leurs preuves et se sont révélés de bons guides.

*Morphismes; structures initiales et finales.* — Une structure sur un ensemble  $E$  est définie par plusieurs axiomes qui s'expriment en termes d'éléments de  $E$  et d'ensembles auxiliaires éventuels; la forme de ces axiomes définit ce qu'on appelle une *espèce de structure*. Nous nous contenterons ici de donner des exemples:

Les axiomes de groupe définissent une espèce de structure; les groupes commutatifs en constituent une sous-espèce. Autres exemples: l'espèce des espaces vectoriels sur  $R$ , des espaces topologiques compacts, des variétés différentiables.

Si deux ensembles  $A$  et  $B$  sont munis de structures de la même espèce, une bijection (c'est-à-dire une correspondance biunivoque)  $f$  de  $A$  sur  $B$  s'appelle un *isomorphisme* si, en un sens facile à préciser dans chaque cas, elle échange les structures de  $A$  et  $B$ .

Plus généralement un *morphisme* de  $A$  dans  $B$  est une application de  $A$  dans  $B$  possédant certaines propriétés liées à la structure; on choisit la définition des morphismes de telle sorte que le produit de deux morphismes en soit un autre, et que si une bijection  $f$  de  $A$  sur  $B$  est un morphisme, ainsi que  $f^{-1}$ , alors  $f$  est un isomorphisme. Par exemple, pour l'espèce de structure constituée par les espaces topologiques, les applications continues constituent une classe de morphismes; les applications ouvertes (qui transforment tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert) constituent une autre classe, moins utile d'ailleurs que la première.

Soient alors  $A$  un ensemble donné,  $(B_i)$  une famille d'ensembles munis d'une structure d'espèce donnée et, pour tout  $i$ , soit  $f_i$  une application de  $A$  dans  $B_i$ . La question se pose de savoir si l'on peut munir  $A$  d'une structure de la même espèce de telle

sorte que chaque  $f_i$  devienne un morphisme. Sous certaines conditions qu'on peut préciser, ceci est possible, et parmi toutes les solutions, il en existe même une privilégiée, qu'on appelle *structure initiale* associée aux  $(B_i, f_i)$ . C'est de cette façon que, pour l'espèce des espaces topologiques, on définit l'image réciproque d'une topologie, la topologie induite sur un sous-ensemble d'un espace donné, le produit d'une famille d'espaces topologiques.

Lorsque, par contre,  $f_i$  est une application de  $B_i$  dans  $A$ , la solution éventuelle du problème s'appelle la *structure finale* associée aux  $(B_i, f_i)$ ; c'est ainsi qu'on définit une topologie sur l'ensemble quotient  $A$  d'un espace topologique  $B$  par une relation d'équivalence  $R$ .

*Ensembles et applications universelles.* — Voici de quoi il s'agit : Soient  $S, T$  deux espèces de structures; soit  $A$  un ensemble d'espèce  $S$ ; on se donne une famille d'applications, dites  $(S - T)$  applications de  $A$  dans les ensembles d'espèce  $T$ , et une famille d'applications, dites  $T$ -applications, des ensembles d'espèce  $T$  dans les ensembles de même espèce; on suppose ces familles transitives en ce sens que le produit d'une  $(S - T)$  application par une  $T$ -application est encore une  $(S - T)$  application, et que le produit de deux  $T$ -applications est encore une  $T$ -application.

On cherche alors s'il existe un ensemble  $\mathcal{B}$  d'espèce  $T$  et une  $(S - T)$  application  $\Phi$  de  $A$  dans  $\mathcal{B}$ , tels que toute  $(S - T)$  application  $\varphi$  (de  $A$  dans un  $B$ ) s'écrive  $\varphi = f \circ \Phi$ , où  $f$  est une  $T$ -application de  $\mathcal{B}$  dans  $B$ .

Sous des conditions suffisantes très générales, le problème a une solution, et même une infinité de solutions non isomorphes. Pour lever l'indétermination, on ajoute alors la condition suivante: L'image  $\Phi(A)$  de  $A$  dans  $\mathcal{B}$  est telle que deux  $T$ -applications de  $\mathcal{B}$  dans un  $B$ , qui coïncident dans  $\Phi(A)$ , coïncident dans  $\mathcal{B}$ . L'espace  $\mathcal{B}$  ainsi obtenu est l'*espace universel* associé à  $A$ , et  $\Phi$  est l'*application universelle* associée à  $A$ .

### Exemples.

a) *Groupe compact associé à un groupe topologique.* —  $A$  est un groupe topologique,  $T$  est l'espèce des groupes topologiques compacts, les  $(S - T)$  applications et les  $T$ -applications sont des

homomorphismes continus quelconques. L'espace  $\mathcal{B}$  s'appelle le groupe compact associé à  $A$ .

On montre qu'il y a identité entre les fonctions presque-périodiques sur  $A$  et les fonctions  $g \circ \Phi$ , où  $g$  est une fonction continue quelconque sur  $\mathcal{B}$ .

Cet exemple montre l'intérêt que peuvent avoir les ensembles universels pour l'Analyse.

b) *Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.* —  $A$  est le produit (cartésien) de deux espaces vectoriels  $E_1, E_2$  (sur le corps  $R$ );  $T$  est l'espèce des espaces vectoriels sur  $R$ ; les  $(S-T)$  applications sont les applications bilinéaires définies dans  $E_1 \times E_2$ ; les  $T$ -applications sont les applications linéaires. L'espace vectoriel universel  $\mathcal{B}$  s'appelle le produit tensoriel des espaces  $E_1, E_2$ ; il ramène l'étude des applications bilinéaires définies dans  $E_1 \times E_2$  à celle des applications linéaires définies dans  $\mathcal{B}$ .

Citons quelques autres ensembles universels:

Structures algébriques libres, anneaux et corps de fractions; complétion d'un espace uniforme, compactification de Stone-Cech, groupes topologiques libres, variété d'Albanèse (en géométrie algébrique).

*Catégories et foncteurs.* — La théorie des « catégories » est le dernier-né des grands outils mathématiques. A elle seule, elle suffirait à prouver l'unité des mathématiques. Elle constitue un nouveau pas dans l'abstraction; en effet, les relations qu'elle étudie ne sont même plus des relations entre éléments d'un même ensemble, mais entre des êtres d'une même « catégorie », voire même entre différentes catégories. Il est assez miraculeux qu'une telle généralité ne soit pas synonyme de vacuité et de facilité; en fait, cette théorie est devenue, dans de nombreux domaines, un guide indispensable de la jeune génération.

Nous nous contenterons de donner ici quelques définitions. Voici d'abord quelques exemples de catégories: La catégorie des groupes, des espaces vectoriels, des espaces topologiques, des ensembles ordonnés; et, plus généralement, la catégorie des ensembles munis d'une espèce de structure dans laquelle existent des morphismes.

Une catégorie n'est donc pas un ensemble; il est commode de l'imaginer comme une classe d'objets plus vaste qu'un ensemble.

Soit donc  $\mathcal{C}$  une classe d'objets; à tous  $x, y \in \mathcal{C}$ , on suppose associé un ensemble désigné par  $Hom(x, y)$ , dont les éléments s'appellent *homomorphismes* ou *morphismes* de  $x$  dans  $y$ ; et pour tous  $x, y, z \in \mathcal{C}$ , on suppose donnée une application  $(f, g) \rightarrow g \circ f$ , nommée *composition*, de  $Hom(x, y) \times Hom(y, z)$  dans  $Hom(x, z)$ .

On dira que  $\mathcal{C}$ , muni de ses homomorphismes et de leur loi de composition, est une catégorie si les axiomes suivants sont satisfaits:

$K_1$ . — Associativité de la composition:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

$K_2$ . — Pour tout  $x \in \mathcal{C}$ , il existe un élément  $e_x$  de  $Hom(x, x)$  appelé *unité* de  $x$ , tel que pour tout homomorphisme  $f$  on ait  $e_x \circ f = f$  et  $f \circ e_x = f$  (lorsque ces expressions ont un sens).

On appellera alors *isomorphisme* de  $x$  dans  $y$  ( $x, y \in \mathcal{C}$ ) tout  $u \in Hom(x, y)$  tel qu'il existe  $v \in Hom(y, x)$  pour lequel  $u \circ v = e_y$  et  $v \circ u = e_x$ .

Les *foncteurs* vont établir des relations entre catégories différentes: Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux catégories; on se donne une loi  $F$  qui, à tout  $x \in \mathcal{C}$  associe un  $x' \in \mathcal{C}'$ ; on note cet  $x'$  par  $F(x)$ ; on suppose aussi que, à tous  $x, y \in \mathcal{C}$ , et à tout  $u \in Hom(x, y)$ ,  $F$  associe  $u' \in Hom(x', y')$  et on note cet  $u'$  par  $F(u)$ .

On dira que  $F$  est un foncteur lorsque

- 1) Si  $u$  est une unité; il en est de même de  $F(u)$ ;
- 2) Pour tous  $u, v$  tels que  $u \circ v$  ait un sens, on a:

$$F(u \circ v) = F(u) \circ F(v).$$

A partir de ces deux notions de base, catégories et foncteurs, on peut alors construire toute une algèbre qui s'enrichit lorsqu'on spécialise les catégories. Indiquons sur un exemple simple de quelle façon la théorie des catégories peut servir de guide: De l'étude de diverses catégories « concrètes » classiques dans lesquelles existe une notion de produit (ensembles ordonnés, groupes, espaces topologiques), on dégage un schéma exprimable en termes

de catégories générales, d'où une notion de *catégorie avec produit*; dès lors, si l'on rencontre une nouvelle catégorie concrète non encore munie d'une notion de produit, le schéma général permet de s'assurer si l'on peut définir ce produit, et précise même sa définition.

Résumons: Nous venons d'étudier quelques outils de caractère très général; il en existe bien d'autres, comme par exemple les suites exactes et les diagrammes qui sont d'un usage constant en algèbre et en topologie algébrique. L'usage de ces outils est inséparable d'un symbolisme très précis dont le domaine d'application grandit constamment; c'est un nouveau langage, hermétique pour le profane, clair et suggestif pour l'initié.

Certes, ces outils ne constituent pas la « pierre philosophale »; ils ne tiennent pas lieu de génie créateur et ne valent que ce que vaut l'artisan.

#### MÉTHODES DE DÉCOUVERTES LIÉES A L'AXIOMATIQUE

Aucun outil et aucune méthode ne peuvent susciter les dons créateurs si ceux-ci n'existent déjà, mais ils peuvent considérablement en augmenter l'efficacité. Nous venons d'étudier quelques outils des théories axiomatiques; nous allons maintenant analyser quelques méthodes de découverte qui ne prennent tout leur sens que dans l'étude de structures multivalentes. Tout chercheur sérieux les redécouvre pour son compte, mais il n'est pas sans intérêt de les expliciter.

##### 1. *Méthode de relâchement des axiomes.*

Voici un analyste qui croit exact un énoncé  $E$  concernant une structure-carrefour  $S$  définie par de nombreux axiomes. L'énoncé  $E$  est formulé en termes simples qui garderaient un sens pour un système axiomatique  $S'$  moins riche en axiomes (ce qui ne veut pas dire d'ailleurs que cet énoncé soit vrai dans  $S'$ ). Il peut alors suivre la méthode suivante, qui revient à « relâcher » certains axiomes: Il va chercher à démontrer l'énoncé  $E$  dans  $S'$ ; le moins grand nombre des combinaisons d'axiomes de  $S'$  peut faciliter alors la recherche de la démonstration; dans le cas favorable, ou

bien il démontrera  $E$  dans  $S'$ , donc aussi dans  $S$ , ou bien il mettra en évidence dans  $S'$  un « contre-exemple »  $C$  mettant l'énoncé  $E$  en défaut. Une étude approfondie de  $C$  peut alors l'amener à formuler une propriété supplémentaire  $P$  qui, ajoutée aux axiomes de  $S'$ , permettrait de démontrer  $E$ . Il lui reste alors à revenir au système  $S$  pour examiner si on peut démontrer  $P$ ; la démonstration de  $E$  en résultera.

## 2. *Méthode de renforcement des axiomes.*

La méthode précédente consistait à supprimer temporairement certains axiomes du système  $S$ ; une autre méthode de recherche consiste à en ajouter de nouveaux, autrement dit à étudier des cas particuliers.

Les axiomes supplémentaires permettent d'utiliser des outils dont on ne disposait pas dans  $S$ ; on obtient ainsi des énoncés et des démonstrations inattendus; on revient ensuite en arrière et on essaie d'adapter à  $S$  les résultats obtenus.

Un cas particulier bien connu de cette méthode consiste en l'utilisation de modèles discrets ou même finis: Par exemple, en calcul des probabilités, les processus de Markov doivent beaucoup à l'étude des processus sur les ensembles discrets ou finis; en théorie du potentiel, l'étude des noyaux sur un ensemble fini révèle des phénomènes insoupçonnés dans le cas général.

## 3. *Etude de structures voisines.*

Si l'on ne sait pas démontrer un énoncé  $E$  relatif à une structure-carrefour  $S$ , mais qu'on sait le démontrer pour une structure  $S'$  dont les axiomes diffèrent peu de ceux de  $S$ , une grande partie des lemmes en lesquels se décompose la démonstration de  $E$  dans  $S'$  est en général encore valable dans  $S$ ; on examine les autres, on les formule au besoin d'une autre façon pour obtenir des énoncés valables dans  $S$ .

C'est ainsi que, dans l'impossibilité actuelle de démontrer l'hypothèse de Riemann, on étudie les problèmes voisins relatifs à des corps finis; on espère, soit pouvoir transposer une partie des résultats ainsi obtenus au cas classique, soit même faire apparaître ces divers cas comme des cas particuliers d'un même

problème arithmético-algébrique. Un tel problème, plus général, peut être plus facilement résoluble; l'histoire des mathématiques montre en effet abondamment qu'un niveau convenable de généralité s'accompagne souvent d'une plus grande souplesse et dégage les ressorts secrets des démonstrations.

Il importe toutefois de ne pas tomber dans le travers consistant, lorsqu'on ne sait pas résoudre un problème, à résoudre des problèmes voisins plus faciles, et à croire qu'on a fait progresser la question initiale; de tels essais sont d'excellents travaux d'approche, mais il est souvent préférable de ne pas en imposer la lecture à autrui.

#### 4. *Création de structures soumises à des exigences données.*

L'industrie construit maintenant, à la demande, des machines-outils capables de réaliser tel travail complexe; on est proche du jour où la chimie saura synthétiser les fibres-textiles satisfaisant à telle exigence du consommateur; en mathématiques, la théorie des catégories permet d'envisager maintenant la construction de structures possédant telles propriétés utiles dans telle question. L'état d'esprit du jeune mathématicien n'est plus en effet celui d'un constructeur en contact avec la matière. Il ne construit plus, de proche en proche, à partir de leurs éléments, les êtres complexes dont il a besoin; il impose seulement à ces êtres d'avoir des relations mutuelles données (et non contradictoires); ils constituent alors une catégorie qu'on étudie par une méthode régulière; la réalisation des éléments de la catégorie comme ensembles munis d'une certaine structure est l'un des derniers stades de la recherche.

### QUELQUES CARACTÈRES DE L'ŒUVRE DE BOURBAKI EN ANALYSE

Nous avons examiné les outils et les principes; voyons maintenant la réalisation, dans l'œuvre collective ou personnelle des Bourbakistes.

#### 1. *Axiomatique et multivalence.*

Conformément à ses principes, BOURBAKI manifeste une prédilection pour les structures multivalentes. Il aime les énoncés



généraux: « Quand ça ne coûte pas plus cher, on fait la théorie dans le cadre le plus général. » D'où économie de pensée, d'où aussi parfois un effort plus grand d'abstraction exigé du lecteur.

Ainsi, non seulement les espaces vectoriels sont étudiés sur un corps quelconque, mais partout où c'est possible, on remplace leur étude par celle des modules sur un anneau avec unité (ce qui oblige évidemment à adopter des définitions valables dans le cas général, par exemple celle du produit tensoriel). De même, les équations différentielles  $x' = f(x, t)$  sont étudiées, non dans le cadre des espaces de dimension finie, mais dans celui des espaces normés, et  $f(x, t)$  est seulement supposée lipschitzienne en  $x$ , et réglée en  $t$ <sup>1</sup>.

## 2. Bourbaki est essentiellement algébriste.

Ses promoteurs ont découvert l'algèbre auprès des grands algébristes allemands, à une époque où, en France, on ignorait l'algèbre moderne; aussi leur œuvre d'Analyse est-elle imprégnée d'algèbre et de notations algébriques: Algèbre des ensembles certes, mais aussi groupes, algèbre linéaire et multilinéaire, dualité. Ils ont le goût des transformations, des propriétés qui s'expriment sous forme de relation algébrique.

Lorsqu'une théorie, classiquement considérée comme de l'Analyse, peut s'algébriser, totalement ou en partie, le Bourbakiste ne résiste pas au plaisir de le faire.

Autrefois l'Analyse était essentiellement l'étude des fonctions définies sur  $R$  ou  $R^n$  et à valeurs dans  $R$  ou  $R^n$ , et des opérations de dérivation et d'intégration. Maintenant pour le Bourbakiste,  $R$  est avant tout un corps commutatif de caractéristique 0, et cela lui suffit souvent; lorsque c'est vraiment de  $R$  qu'il a besoin, il sait exactement qu'il lui suffit de tenir compte de son ordre et de sa locale compacité.

Entre les mains de C. CHEVALLEY, l'étude des groupes de Lie et des Algèbres de Lie se dégage de sa gangue; l'analyse n'y joue plus qu'un rôle restreint; elle sert seulement à établir l'existence d'êtres munis de telle propriété, ou à définir telle opération. Par

<sup>1</sup>) Une fonction réglée de  $t$  est une limite uniforme de fonctions constantes par intervalles.

exemple on ne retient de la dérivation que son caractère d'application linéaire d'une algèbre dans elle-même, vérifiant l'identité  $D(xy) = xD(y) + D(x)y$ .

De même, avec H. CARTAN, la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes s'épure; l'intégration reste un outil de base, mais il en localise l'étude, en dégage les propriétés algébriques, qui seront les seules à être utilisées désormais. Dans sa « Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes », il adopte le point de vue de WEIERSTRASS plutôt que celui de CAUCHY, et dans le premier chapitre, il tire de l'étude algébrique des séries formelles le maximum d'information concernant leur composition, leur inversion et leur dérivation. Lorsqu'il étudie la théorie du potentiel, il donne la préférence aux outils algébriques: Formule de composition de noyaux, interprétation du balayage comme projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

### 3. *Renouvellement constant de l'œuvre.*

L'œuvre de BOURBAKI n'est pas un bilan du passé, mais une œuvre de jeunes; c'est une construction vivante en perpétuelle évolution et tournée vers l'avenir. BOURBAKI incorpore à son œuvre les développements, même récents, qui ont fait leurs preuves et, en fonction du développement de telle structure, revoit toutes les branches maîtresses (y découvrant parfois au passage des fruits succulents et inattendus). C'est ainsi que les fascicules anciens vont être remaniés en termes de catégories, sous forme implicite ou explicite; de même les espaces topologiques non séparés ont maintenant droit de cité, depuis qu'ils ont manifesté leur importance dans diverses théories, en particulier en géométrie algébrique; les équations aux dérivées partielles linéaires seront traitées en termes de distributions, de convolution, de transformation de Fourier et Laplace.

Certes BOURBAKI, tout polycéphale qu'il soit, a sur certains points des phobies irrationnelles: C'est ainsi qu'il s'est fait de la théorie de la mesure une conception intéressante, mais exagérément rigide en termes d'espaces localement compacts et de convergence vague; et il relègue au musée des horreurs les mesures abstraites, fermant ainsi à ses disciples les portes du calcul des

probabilités, qui n'a peut-être pas encore trouvé les meilleurs outils, mais manifeste actuellement une vitalité étonnante.

#### 4. *Choix des définitions.*

La recherche des bonnes définitions est une partie essentielle de l'œuvre bourbakiste. On reproche parfois à cette œuvre son caractère trop formel et déductif: BOURBAKI pose les axiomes et en tire les conséquences, mais ne révèle pas la raison du choix de ces axiomes et des théorèmes qu'il démontre. C'est qu'en fait l'histoire de ces choix serait bien longue; quiconque a essayé de faire l'axiomatique d'une théorie jusque-là confuse sait que les bonnes définitions ne se trouvent qu'après de multiples essais avortés, dont il ne faut plus ensuite s'encombrer, car l'esprit, partagé entre plusieurs axiomatiques voisines, s'affaiblit et perd son dynamisme.

La véritable justification d'une bonne axiomatique, c'est son succès.

Observons BOURBAKI à l'œuvre dans le choix des définitions: L'Analyse classique partait de définitions « naturelles » dans un contexte historique, et en déduisait des théorèmes-clefs; puis poursuivait l'étude de la théorie, en gardant les définitions de départ.

BOURBAKI, dans la même situation, va modifier les définitions en fonction des théorèmes-clefs; il va, en termes incorrects mais expressifs, prendre les théorèmes-clefs pour définitions. C'est là un des aspects les plus importants de la *bourbakisation* des théories.

De façon plus précise, lorsqu'un théorème établit que des êtres  $E$  définis par une définition  $D$  ont une propriété  $P$ , qui se révèle par la suite plus maniable que  $D$ , ou qui garde un sens dans un champ plus vaste que  $D$ , ouvrant ainsi la voie à des généralisations, BOURBAKI fait jouer à  $P$  le rôle initial de  $D$ , obtenant ainsi, soit une définition de  $E$  équivalente mais plus commode, soit un élargissement de la classe des êtres  $E$  auxquels s'appliquera la théorie.

Voici quelques illustrations de ce processus fécond:

a) *Mesures de Radon.* — Un théorème de F. Riesz établit que, sur  $R$ , il y a identité entre les intégrales de Stieltjes (définies à

partir d'une fonction localement à variation bornée), et les formes linéaires continues sur l'espace  $\mathcal{K}(R)$  des fonctions numériques continues nulles hors d'un compact.

Or cette seconde définition a de multiples avantages: Extension immédiate, non seulement à  $R^n$ , mais à tout espace localement compact; maniabilité beaucoup plus grande dans l'étude des opérations sur les mesures (produit de mesures, image de mesures, etc...), adaptation parfaite à la définition de la topologie vague sur l'espace des mesures, qui s'est révélée la plus commode des topologies.

D'où la définition bien connue des mesures de Radon. L'histoire devait montrer que le choix de cette nouvelle définition n'était pas heureux que pour l'intégration. En effet, on s'aperçut vite de la commodité du procédé: Une mesure de Radon n'était autre qu'une forme linéaire continue sur un certain espace vectoriel topologique. Il n'y avait qu'un pas à franchir pour disposer aussitôt d'un procédé fécond de définition d'êtres nouveaux: Soit  $V$  un espace vectoriel topologique; les formes linéaires continues sur  $V$  sont de nouveaux êtres qui constituent un espace vectoriel  $V'$ , dual de  $V$ ; la théorie de la dualité, maintenant bien constituée, permet de définir sur  $V'$  des topologies variées, qui en facilitent l'étude. A tout choix de  $V$  va correspondre un espace  $V'$ , d'où une grande richesse de possibilités. Signalons par exemple les distributions de L. Schwartz, les courants de de Rham, les surfaces généralisées de L. C. Young.

b) *Mesures invariantes sur un groupe.* — L'intégrale (de Lebesgue) sur  $R$  peut être définie à partir de celle des fonctions continues à support compact par un procédé de prolongement bien connu; sur  $\mathcal{K}(R)$ , c'est une forme linéaire  $I$  qui est positive en ce sens que  $I(f) \geq 0$  pour toute  $f \geq 0$ ; et elle est invariante par translation, en ce sens que  $I(f) = I(g)$  lorsque  $g$  se déduit de  $f$  par translation.

Or on montre que toute fonction  $I$  sur  $\mathcal{K}(R)$  qui possède ces propriétés ne diffère de l'intégrale de Lebesgue que par un facteur constant. D'où une définition axiomatique de l'intégrale de Lebesgue sur  $R$  (à un facteur près): C'est une forme linéaire sur  $\mathcal{K}(R)$ , positive et invariante par les translations de  $R$ . Non

seulement cette nouvelle définition est commode parce que, débarrassée de l'écran d'une construction effective, elle met en évidence les propriétés directement utiles de l'intégrale, mais elle s'adapte immédiatement au cas des groupes localement compacts quelconques.

c) *Fonctions mesurables.* — L'Analyse classique définit les applications mesurables de  $R^n$  dans  $R$  de la façon suivante :

$f$  est mesurable si pour tout nombre  $\lambda$ , l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x) \leq \lambda$  est mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Le théorème de Lusin montre l'équivalence de cette définition et de la suivante :

$f$  est mesurable si, pour tout compact  $K$  de  $R^n$ , et pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un sous-compact  $K'$  de  $K$  tel que 1) la mesure de  $(K \div K')$  soit inférieure à  $\varepsilon$ ; 2) la restriction de  $f$  à  $K'$  soit continue.

Or, la propriété évoquée dans cette seconde définition est à la fois suggestive et commode dans de nombreuses applications; d'autre part elle conserve un sens intéressant lorsqu'on remplace la mesure par une fonction d'ensemble plus générale, par exemple la capacité en théorie du potentiel; enfin elle s'adapte immédiatement à la définition des applications mesurables d'un espace localement compact (muni d'une mesure de Radon positive) dans un espace topologique quelconque.

On adoptera donc la seconde définition, plutôt que la définition classique.

##### 5. *Choix des matières et des théorèmes.*

Dans l'élaboration de son traité, BOURBAKI doit à chaque instant choisir; nous l'avons vu à l'œuvre dans le choix des définitions; il choisit avec autant de soin la matière qu'il incorporera à l'œuvre.

Il s'intéresse surtout aux outils, et uniquement à ceux qui se sont révélés utiles; les résultats élégants et même profonds, mais qui apparaissent comme des fins de théorie ou des impasses, ne retiennent pas son attention. Il élimine, sans souci d'être complet, des notions voisines de celles qu'il a jugées les plus fondamentales; s'il estime qu'une théorie n'est pas assez mûre pour qu'un

choix s'impose entre ses diverses axiomatiques possibles, il préfère attendre que la théorie mûrisse. Il n'a pas le goût des hors-d'œuvre, des enjolivures, des développements gratuits sans connexion avec le reste des mathématiques.

Il construit solidement, à la romaine; si l'œuvre est parfois élégante, elle le doit à la beauté de sa structure interne; quant à lui, il recherche avant tout simplicité, solidité, utilité, rendement.

En topologie générale il a, après HAUSDORFF, fait un choix sobre dans une jungle de notions: Choix d'axiomes commodes des espaces topologiques généraux, choix de la bonne notion de compacité; l'introduction des filtres (H. CARTAN) est venue simplifier la notion de convergence; celle des espaces uniformes (A. WEIL) a unifié plusieurs notions jusque-là isolées, et les relations entre les espaces compacts et les espaces uniformes l'a entièrement justifiée.

En Analyse fonctionnelle, il a bien mis en valeur les notions et outils consacrés par l'usage, locale convexité des espaces vectoriels topologiques, dualité, théorème du graphe fermé, théorèmes de séparation d'ensembles convexes, théorèmes de Krein et Milman, de Stone-Weierstrass.

Dans la théorie de l'intégration, nous avons souligné déjà son option exclusive des mesures de Radon sur les espaces localement compacts, qui sont devenues entre ses mains un outil remarquable.

Dans les « livres élémentaires », les questions classiques sont traitées à la fois avec une économie de moyens et une généralité inusuelles. Le théorème des accroissements finis est énoncé pour des fonctions à valeurs dans un espace normé; les fonctions convexes sont traitées élémentairement mais de façon assez complète pour les besoins courants de l'analyse; les primitives sont définies dans le cadre des fonctions réglées; enfin nous avons déjà noté la généralité de son étude « élémentaire » des équations différentielles.

#### L'ANALYSE MODERNE DANS LE MONDE

J'ai affirmé au début de ce travail que l'étude de l'œuvre de BOURBAKI et de ses disciples donnait une idée assez fidèle des tendances modernes de l'Analyse.

Après notre brève étude des traits saillants de cette œuvre, nous pouvons tenter de vérifier cette affirmation en examinant ce qui se fait dans le monde en Analyse. Ouvrons pour cela les *Mathematical Reviews*; quelques coups de sonde révèlent qu'au moins les deux tiers de ce qui se fait actuellement aurait pu être fait avec les outils dont on disposait il y a une trentaine d'années; une bonne partie de ces travaux est estimable; certains sont de l'Analyse fine très difficile; des notions importantes y sont introduites, des outils y sont créés et essayés dans un domaine localisé.

On peut regretter néanmoins que trop d'auteurs ignorent encore des outils de base qui ont fait leurs preuves et qu'ils retrouvent, ingénieusement mais péniblement et dans un domaine trop restreint des cas particuliers de théorèmes généraux connus.

Dans le tiers restant, les auteurs utilisent les outils modernes. On y retrouve le déchet inévitable dans toute production scientifique; beaucoup des travaux sont creux et ne contribuent pas à l'édification du « temple mathématique »; par contre, chez les meilleurs, les outils modernes ont un rendement étonnant; chaque année apporte la solution de problèmes réputés inaccessibles et voit se créer des ponts entre théories jusque-là étrangères.

Voici une liste des branches les plus florissantes de l'Analyse et de ses frontières:

- Groupes topologiques et théorie de Lie;
- Algèbre topologique;
- Mesure et intégration;
- Fonctions de plusieurs variables complexes et variétés analytiques (outils algébriques nombreux, faisceaux, espaces fibrés,...);
- Equations aux dérivées partielles (utilisation des distributions et autres fonctions généralisées; cas non-linéaire);
- Potentiel (noyaux généraux, étude des principes, relation avec probabilités);
- Analyse harmonique sur des groupes généraux; fonctions de type positif, ...;
- Analyse fonctionnelle (e.v.t. loc. convexes, convexité, théorie spectrale des opérateurs);
- Topologie générale;

Géométrie différentielle;  
Topologie différentielle;  
Probabilités.

Ces disciplines en pleine activité se développent suivant les mêmes principes que BOURBAKI; le langage utilisé est le même. Dans les colloques spécialisés qui leur sont consacrés, les meilleurs spécialistes utilisent les mêmes méthodes, le même langage, ont les mêmes préoccupations. Dans ses parties les plus dynamiques, l'Analyse moderne manifeste donc une grande unité.

#### QU'EN CONCLURE POUR L'ENSEIGNEMENT ?

De tout temps on a adapté l'enseignement à l'évolution de la science, mais il y a eu souvent des retards à cette adaptation, pour le plus grand dommage de la science et de l'enseignement; en particulier, depuis un demi-siècle le progrès scientifique a été si rapide qu'un grand retard était presque inévitable; ainsi en Mathématiques, où la révolution provoquée par la théorie des ensembles et la méthode axiomatique a donné à notre science un visage nouveau. Plusieurs raisons nous invitent de façon urgente à rénover à tous les niveaux, universitaire, secondaire et primaire :

— Pour l'avenir des Mathématiques d'abord; ce ne sont ni les vieillards, ni même les hommes mûrs qui font œuvre géniale en Mathématiques; il faut donc « déblayer le terrain » pour les jeunes. Pour que l'assimilation leur reste possible, on doit leur rendre apparentes les grandes idées simplificatrices, leur apprendre à débrouiller des situations complexes, en leur enseignant des théories qui unifient, qui jettent des ponts entre diverses disciplines. Certes il faut pour cela faire des sacrifices, accepter de ne plus enseigner telle théorie élégante que plusieurs siècles avaient polie, mais qui n'apparaît plus que comme un rameau isolé.

— Pour les utilisateurs (de plus en plus nombreux) des mathématiques, ensuite. D'une part de nombreux outils mathématiques sont devenus indispensables ou utiles en physique ou dans la technique: Matrices, transformations de Fourier ou Laplace, équations aux dérivées partielles, distributions, espaces de Hilbert, etc.;



d'autre part les Mathématiques nouvelles ont apporté dans tous les domaines une simplification et une économie de pensée, dont le technicien ou le physicien peuvent faire leur profit, aussi bien que le futur mathématicien.

Certes, les livres d'enseignement indispensables pour cette rénovation manquent encore; tout à leur travail de découverte, les mathématiciens ont laissé se creuser un large fossé entre recherche et enseignement; depuis une dizaine d'années, effrayés de voir s'agrandir le fossé, ils ont réagi: Ils ont d'abord réformé leur propre enseignement; puis ils se sont tournés vers leurs collègues de l'enseignement secondaire et ont commencé avec eux une conversation féconde; il leur reste à s'armer de courage pour un travail essentiel et urgent: Le temps des critiques et des indications vagues est passé; il leur faut maintenant écrire des livres d'enseignement ou aider leurs collègues techniciens et de l'enseignement secondaire à en écrire. Il ne s'agira pas de décalquer l'œuvre de BOURBAKI, qui était conçue pour des étudiants avancés, mais d'adapter à chaque niveau, langage, méthodes et outils des mathématiques de notre temps.

— Pour ceux qui ne deviendront ni mathématiciens, ni utilisateurs des mathématiques, les mathématiques constituent une discipline essentielle pour la formation de l'esprit; l'accord est fait depuis longtemps sur ce point. A ceux-là les mathématiques modernes apporteront peut-être plus encore: La théorie des ensembles étudiée en connexion avec la logique est formatrice et séduisante; la simplicité des systèmes axiomatiques multivalents rend possible leur étude sans une grande technique, et leurs applications sont suffisamment variées pour que cette étude n'apparaisse pas comme un jeu vain.

Il est hors de question d'établir ici un programme ou même d'en indiquer les grandes lignes. Je me contenterai de dégager quelques principes auxquels semble conduire l'étude qui précède:

— Habituer dès que possible nos élèves à penser en termes d'ensembles, d'opérations; ils doivent, très jeunes, savoir utiliser le langage et l'algèbre des ensembles; son symbolisme est simple et précis, et de nombreuses expériences ont montré que les enfants aiment s'en servir.

Parallèlement à l'algèbre des ensembles, on leur apprendra les rudiments de la logique, en relation avec l'étude grammaticale de leur langue. On constate que de grands élèves de 19 ans raisonnent mal, ne savent pas prendre la négation d'une proposition, ni énoncer correctement une définition ou un théorème; c'est en fait bien plus tôt que doit commencer cet apprentissage.

— Très tôt aussi nos élèves doivent concevoir clairement la notion de fonction; pour cela ils doivent avoir étudié et construit eux-mêmes des exemples variés de fonctions dans divers domaines, algèbre, arithmétique, géométrie, physique, vie courante, etc... Ils doivent savoir composer deux fonctions, prendre la fonction réciproque d'une fonction biunivoque, reconnaître une transformation et un groupe de transformations.

— On leur fera connaître progressivement les grandes structures, d'équivalence, d'ordre, topologiques, algébriques. Ces structures peuvent être étudiées, à des niveaux variés, dès le début de l'enseignement secondaire.

Certes il ne faut pas perdre de vue qu'on cherche avant tout à fournir un outil à nos élèves et à leur en apprendre l'usage. Aussi ne faut-il pas se perdre dans les généralités; au contraire, aller droit dès que possible vers les théorèmes-clefs, qui englobent une foule de théorèmes spéciaux, aux applications immédiates:

Par exemple, en géométrie élémentaire, on dégagera très vite la structure affine du plan ou de l'espace, et on utilisera l'algèbre des vecteurs; puis, d'une façon ou d'une autre, on introduira le produit scalaire qui ramènera à quelques calculs simples l'essentiel de la géométrie métrique usuelle.

De même, au niveau universitaire, on dégagera les grands outils, théorèmes sur les espaces compacts, métrique de la convergence uniforme, théorème de Stone-Weierstrass, méthode des approximations successives, etc... On habituera les étudiants à reconnaître dans les énoncés les structures qui interviennent, ce qui suppose évidemment qu'on ait partout choisi définitions et énoncés qui soulignent ces structures. Par exemple, l'intégrale de Lebesgue sur  $R^n$  devra leur apparaître à un stade convenable comme une forme linéaire positive sur  $\mathcal{K}(R^n)$ , invariante par translation; lorsqu'ils étudieront le laplacien, il devra leur appa-

raître comme le seul opérateur différentiel du deuxième ordre invariant par les déplacements; etc...

### LA PLACE DE L'ANALYSE DANS L'ENSEIGNEMENT

J'ai, dans ce travail, beaucoup parlé des Mathématiques en général, et peu de l'Analyse en particulier; c'est qu'en fait il n'est plus possible, comme je l'ai déjà souligné, de diviser l'enseignement des mathématiques en Algèbre, Géométrie, Analyse.

Les bases de l'Analyse, même dans l'enseignement secondaire, sont l'algèbre (algèbre des ensembles, étude du corps  $R$ , algèbre linéaire, groupes) et la topologie. Or la même base algébrique est nécessaire à l'étude de la géométrie (qui au niveau secondaire se réduit à l'étude d'un espace vectoriel à deux ou trois dimensions muni d'un produit scalaire).

Il devient donc essentiel de concevoir un enseignement dont les grandes fibres soient les structures fondamentales. L'algèbre et la géométrie se soutiendront mutuellement, l'algèbre apportant son symbolisme et ses opérations, la géométrie son langage chargé d'intuition; la géométrie fournira à l'Analyse un cadre topologique, l'outil de la convexité, et une interprétation commode de l'intégration et de la dérivation; l'Analyse elle-même fournira à l'algèbre une riche collection de groupes, d'espaces vectoriels.

### L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE GLOBALE

Je n'ai parlé ici que de théories mathématiques élaborées, et un peu des méthodes de recherche. Je ne voudrais pas terminer cette étude faite pour servir l'enseignement des mathématiques sans avoir souligné les aspects de l'activité mathématique que j'ai dû négliger ici entièrement.

Toute activité mathématique se décompose en cycles, grands ou petits, dans chacun desquels on reconnaît, en gros, les stades suivants: observation, mathématisation, déduction, applications.

Ces quatre stades sont essentiels; en particulier un enseignement qui serait purement déductif serait traumatisant et stérile.

Chacun des grands cycles correspond à l'acquisition d'une

nouvelle notion; ses quatre stades sont les étapes nécessaires qui permettent au cerveau de se restructurer et de passer d'un niveau de pensée à un autre. Ceci est aussi valable pour le chercheur que pour l'élève dont l'activité créatrice ne peut s'exercer que si nous le laissons parcourir, avec notre aide, le chemin qui conduit à la connaissance.

Institut Henri Poincaré  
Paris.