

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UEBER DEN ALGORITHMISCHEN STANDPUNKT IN DER DIDAKTIK
DES GRENZWERTBEGRIFFS
Autor: Stiefel, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37953>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UEBER DEN ALGORITHMISCHEN STANDPUNKT IN DER DIDAKTIK DES GRENZWERTBEGRIFFS¹

VON E. STIEFEL

Unser Unterricht in Mathematik auf der Mittelschulstufe hat sicherlich zwei Ziele. Erstens soll durch eine glücklich gewählte axiomatische Basis und vermittels durchsichtiger Schlussweisen das *Verständnis* für mathematische Erkenntnisse und Sätze erreicht werden.

Zweitens aber soll ein vernünftiges Mass von *Können* erreicht werden. Hier handelt es sich vor allem darum, im Schüler den *Willen* und die *Energie* heranzubilden, ein einfaches Problem bis zum bitteren Ende, d.h. bis zum numerischen Resultat zu lösen und *Verantwortung* für dieses Resultat zu übernehmen.

Daher muss an einzelnen ausgezeichneten Stellen des Lehrgangs den *Algorithmen*, also den Rechenverfahren besondere Beachtung geschenkt werden, insbesondere dann, wenn der betreffende Algorithmus ein unendlicher ist, d.h. das Resultat als Grenzwert einer Folge von Einzelergebnissen liefert.

Es soll zunächst an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, wie die Diskussion der Genauigkeitsverhältnisse und der logischen Struktur eines Algorithmus ganz zwangslos die richtigen Begriffsbildungen in der Grenzwerttheorie nahelegt und damit gezeigt werden, warum eigentlich diese Begriffe gebildet werden.

Die erste Gelegenheit zur Einführung eines unendlichen Algorithmus ist die Berechnung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{a},$$

d.h. die Auflösung der Gleichung $x^2 = a$. Ist etwa x_0 ein zu grosser Näherungswert, so ist

$$y_0 = \frac{a}{x_0} \tag{1}$$

¹) Erweiterte Fassung eines Vortrags, gehalten am 27.6.61 anlässlich des JCMI-Seminars in Lausanne.

sicher zu klein. Man kann die Idee haben, das arithmetische Mittel

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_0 + y_0) \quad (2)$$

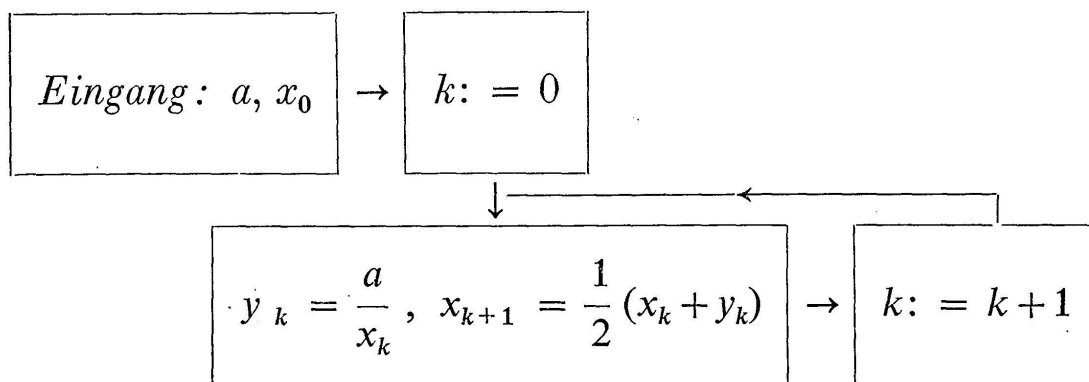
als nächsten Näherungswert zu nehmen und ihm

$$y_1 = \frac{a}{x_1}$$

beizugesellen. Ist damit etwas erreicht worden? Ja, denn man bestätigt sofort

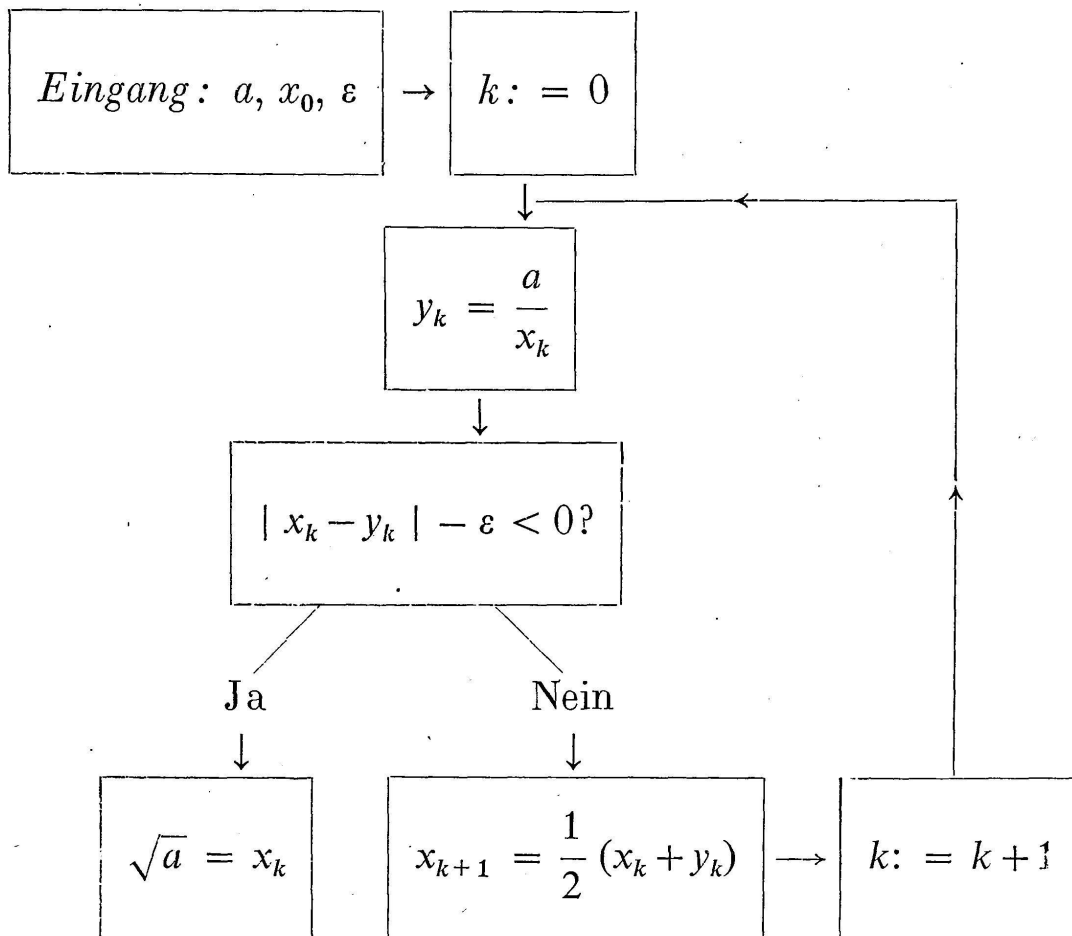
$$x_1 - y_1 = \frac{1}{2} (x_0 - y_0) \frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0} < \frac{x_0 - y_0}{2} \quad (3)$$

Die Lücke zwischen den Näherungswerten wird also mindestens halbiert. Es entsteht folgender Algorithmus:



Das wesentliche ist der rechts entstehende *Rechenzyklus*, der dauernd durchlaufen wird, sei es vom Einzelrechner oder vom Rechenautomaten. Jede numerische Rechnung hat diese zyklische Struktur, wobei oft viele Zyklen ineinandergeschachtelt sind.

Der obige Algorithmus ist noch unvollständig, indem nicht gesagt wird, wann man aufhören darf. Dies wird der Fall sein, wenn für ein gewisses k die Abweichung $(x_k - y_k)$ eine gegebene Toleranz ε nicht übertrifft:



Hier haben wir schon die vollständige logische Struktur eines Rechenautomaten vor uns. Die wichtigste Fähigkeit des Automaten ist offenbar folgende. Er muss zwischen zwei verfügbaren Rechenprogrammen auswählen, je nachdem ob eine in ihm enthaltene Zahl positiv oder negativ ist.

Es muss noch untersucht werden, ob der Rechenvorgang bei beliebiger Wahl von ε immer abbricht. Dies folgt aus (3).

$$x_k - y_k < \frac{x_0 - y_0}{2^k}, \quad (4)$$

weil die Zahl rechts mit wachsendem k beliebig klein wird. Dies ist aber nichts anderes als die bekannte Definition des Grenzwerts:

$(x_k - y_k)$ strebt gegen 0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n gibt, so dass

$$|x_k - y_k| < \varepsilon \quad \text{für} \quad k \geq n. \quad (5)$$

Nur beiläufig sei erwähnt, dass die Intervalle (x_k, y_k) eine Schachtelung bilden, so dass man dem Schüler alle Begriffe der Grenzwerttheorie am Beispiel des Wurzelziehens klar machen

kann. Man muss ihm ferner sagen, dass er Wurzeln genau so berechnen soll, und dass ein Automat sie auch genau so rechnet.

Keine Grenzwerttheorie hat einen Sinn, die sich nicht mühe-los auf die Diskussion solcher Algorithmen anwenden lässt.

Der Algorithmus „par excellence“ auf der Mittelschulstufe ist aber der Algorithmus von Archimedes zur Berechnung der Kreisfläche, also der Zahl π . Bedeuten f_n , F_n beziehlich die Flächen des ein- und umbeschriebenen regulären n -Ecks, so lautet er

$$\frac{1}{f_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{f_n} \frac{1}{F_n}}, \quad \frac{1}{F_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_n} + \frac{1}{f_{2n}} \right). \quad (6)$$

Die Konvergenz ergibt sich aus

$$\frac{1}{f_{4n}^2} - \frac{1}{F_{2n}^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{f_{2n}^2} - \frac{1}{F_n^2} \right\}. \quad (7)$$

Es ist sicher lehrreich, das Strukturdiagramm dieses Algorithmus wieder aufzustellen und ihn ein Stück weit durchzurechnen. Dabei bemerkt man, dass die Konvergenz langsam ist. Der Konvergenzbeschleunigung sollen nun die restlichen Betrachtungen des Vortrags gewidmet sein, wobei sich zum Schluss eine ziemlich überraschende Wendung einstellen wird. Zunächst müssen einige Ereignisse aus der Geschichte der Kreismessung hervorgehoben werden. Im Jahre 1654 stoßen wir auf eine Jugendarbeit von *Huygens*, die sich mit der Konvergenzbeschleunigung befasst. Man kann seine Formeln durch folgende intuitive Betrachtung gewinnen. (6) besagt ja:

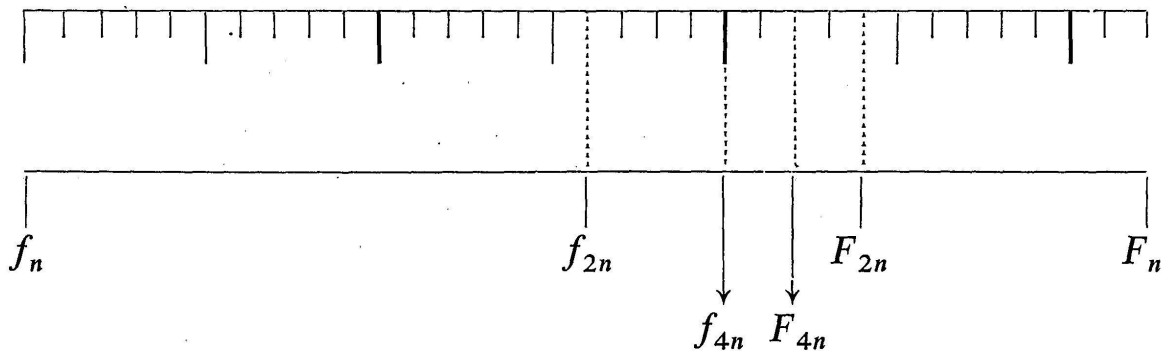
$$f_{2n} = \text{geometr. Mittel von } f_n, F_n$$

$$F_{2n} = \text{harmon. Mittel von } f_{2n}, F_n.$$

Rechnet man genügend weit, so unterscheiden sich das geometr. und harmon. Mittel in den gewünschten Stellen nicht vom arithmetischen Mittel. Von da an kann man also rechnen:

$$f_{2n} = \frac{1}{2} (f_n + F_n), \quad F_{2n} = \frac{1}{2} (f_{2n} + F_n),$$

was auf der Zahlenachse so aussieht.



Die Sache konvergiert gegen den Punkt im zweiten Drittel der Strecke f_n, F_n . Seine Abszisse ist

$$f_{2n} + \frac{1}{3} (f_{2n} - f_n) = \frac{4f_{2n} - f_n}{3}$$

oder auch

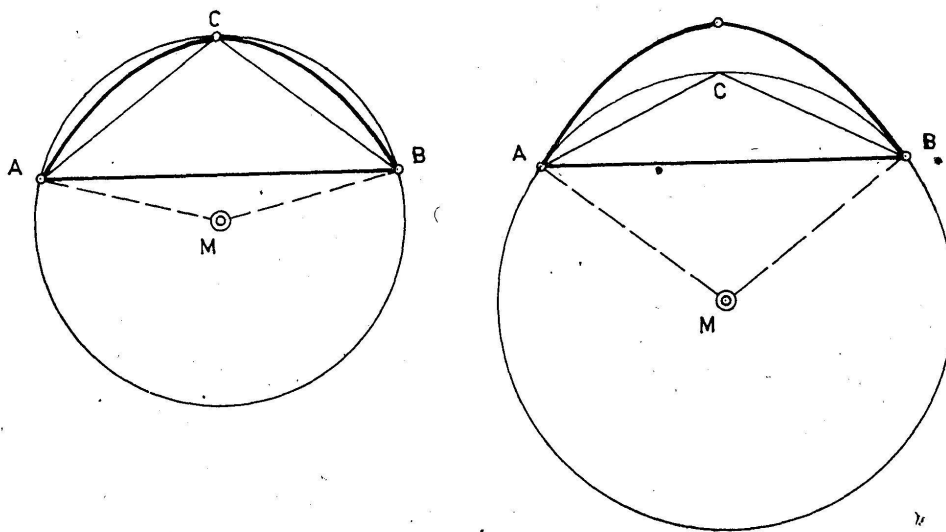
$$F_n - \frac{1}{3} (F_n - f_n) = \frac{2F_n + f_n}{3}.$$

Huygens zeigt nun, dass diese beiden Folgen wieder eine Schachtelung für π bilden:

$$\frac{4f_{2n} - f_n}{3} < \pi < \frac{2F_n + f_n}{3} \quad (8)$$

die aber bedeutend rascher gegen π konvergieren als die ursprünglichen Folgen.

Der Beweis von (8) ergibt sich daraus, dass man den Kreisbogen



EINBESCHRIEBENE PARABEL

UMBESCHRIEBENE PARABEL

Fig. 1.

ABC über der Seite AB des einbeschriebenen n-Ecks ein erstes Mal ersetzt durch die Parabel ABC und ein zweites Mal durch die Parabel, welche in A, B berührt. Ein hübsches Stück Elementargeometrie, das aber wohl etwas über die Mittelschule hinausgeht.

Die Huygens'schen Untersuchungen sind leider ziemlich unbeachtet geblieben und von den neu einsetzenden Methoden der Differentialrechnung überstrahlt worden. Erst 1936 hat K. KOMMERELL gezeigt, dass man die Huygens'sche Konvergenzverbesserung iterieren kann. Wir beschränken uns auf die Folge f_n und auf die abgeleitete Folge

$$f'_{2n} = \frac{4f_{2n} - f_n}{3} \quad (\text{Gewichte } 4, -1)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_4 & & & & & & \\
 \downarrow & \searrow & & & & & \\
 f_8 & f'_8 = \frac{4f_8 - f_4}{3} & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \searrow & & & & \\
 f_{16} & f'_{16} = \frac{4f_{16} - f_8}{3} & f''_{16} = \frac{4^2 f'_{16} - f'_8}{4^2 - 1} & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & & & \\
 f_{32} & f'_{32} = \frac{4f_{32} - f_{16}}{3} & f''_{32} = \frac{4^2 f'_{32} - f'_{16}}{4^2 - 1} & f'''_{32} = \frac{4^3 f''_{32} - f''_{16}}{4^3 - 1} & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 \left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{16}\right) & \left(\frac{1}{64}\right) & & & & \text{superlinear}
 \end{array}$$

Kommerell fügt nun eine zweite Folge f''_n hinzu, die mit den Gewichten $(4^2, -1)$ aus f'_n gebildet ist und noch schneller konvergiert. Es folgen weitere Kolonnen nach leicht ersichtlichem Bildungsgesetz. Der Wert f'''_{128} gibt π bereits mit 10 richtigen Dezimalen! Eine nähere Diskussion fördert folgendes Ergebnis zutage. Jede Kolonne konvergiert *linear*, d.h. wie eine geometrische Reihe. Die Konvergenzfaktoren (Quotienten der geometr. Reihe) stehen unten. Die Diagonale konvergiert *superlinear*, d.h. schneller als jede geometr. Reihe. Diesem Algorithmus sind im letzten Jahre mehrere Untersuchungen gewidmet

worden,¹⁾ und zwar aus folgendem Grunde. Man kann ihn unverändert für die Integration einer Funktion $f(x)$ verwenden. Man muss sich nur das Kreiszentrum M ins Unendlich-Ferne nach unten verlegt denken.

f_n ist dann der Näherungswert für das Integral, wenn man das Integrationsintervall in n gleiche Teile einteilt und die Trapezregel anwendet.

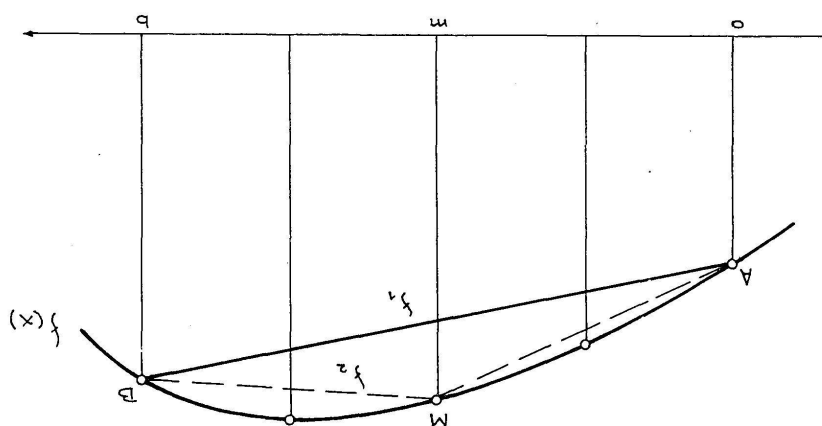


fig. 2

Falls $f(x)$ analytisch ist im Integrationsintervall, gelten genau dieselben Konvergenzverhältnisse. Das Integrationsverfahren bewährt sich ausgezeichnet und ist den Verfahren überlegen, die auf der Interpolationstheorie beruhen (Cotes usw). Etwas überspitzt könnte man sagen: Archimedes hat den Kern der genäherten Quadratur besser erfasst als seine Nachfolger. Denn er hat ja genau dasselbe Verfahren für die Quadratur einer Parabel $f(x)$ benutzt.

Ich verfolgte mit diesem kleinen Exkurs das Ziel, meine folgende Meinung zu begründen. Wir dürfen uns bei Schulreformen nicht allzusehr durch die gerade vorherrschenden Forschungs- und Arbeitsrichtungen in der Mathematik beeindrucken lassen. Infolge der Oszillationen in der Auffassung und Lehrmeinung der Hochschule entsteht nämlich die Gefahr, dass sich die Mittelschule infolge ihrer unvermeidlichen Phasen-

¹⁾ W. ROMBERG. Vereinfachte numerische Integration (Trondheim 1955), *Det Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger*, Bd. 28, Nr. 7.

E. STIEFEL, Altes und Neues über numerische Quadratur (*Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 41, 1961, Heft 10/11).

E. STIEFEL u. H. RUTISHAUSER, Remarques concernant l'intégration numérique (April 1961). *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

verschiebung immer nach vorgestriger Mode kleidet, was natürlich den Forschern an der Front, welche die neueste Pariser Mode tragen, missfällt.

Ich könnte mir zum Beispiel denken, dass um 1945 mit dem Aufkommen der Rechenautomaten gewisse Leute vorgeschlagen hätten, man müsse auf der Schule mehr vom Interpolieren bringen. Unser kleines Beispiel beweist, dass dies verkehrt gewesen wäre.

Eidgenössische Technische Hochschule
Zürich.