Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES
Autor: Chabauty, Claude
Kapitel: V. Densité d'empilement de sphères: LE RÉSULTAT DE BLICHFELDT.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37952

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

a ses coefficients entiers, mais est rationnellement indécomposable (les a_{ij} sont donc des nombres algébriques) et si $f(1, 0, ..., 0) = 1$ le théorème du produit montre que pour un entier $h \neq 0$ convenable l'équation $f(x_1, ..., x_n) = h$ a une infinité de solutions en entiers $x_1, ..., x_n$. Si en outre $f(1, 0, ..., 0) = 1$ on peut déduire de deux solutions entières congrues mod h, une solution de $f(x_1, ..., x_n) = 1$ qui a ainsi une infinité de solutions. C'est la généralisation à n variables du résultat (B) sur l'équation de Pell-Fermat [1]).

V. Densité d'empilement de sphères: le résultat de Blichfeldt.

Mais revenons aux formes quadratiques définies. Le résultat de Minkowski, $\gamma_n \leqq n$, qui surprit tous ses contemporains par la simplicité et la généralité de la méthode de majoration utilisée, n'est en fait que la traduction du résultat intuitif que, dans un empilement $(A + \vec{g}, \vec{g} \varepsilon G)$ le quotient de l'espace occupé par l'empilement à l'espace total est $\leqq 1$. Tel quel bien entendu l'énoncé n'est pas correct puisque l'espace entier et l'espace occupé par l'empilement sont infinis, il faut se restreindre à un domaine $|x_1| \leqq l, ..., |x_n| \leqq l$, et étudier ce qui se passe quand l croit indéfiniment. On obtient alors comme limite du quotient, que nous appellerons la *densité de l'empilement*, mes (A)/dét G. Ne peut-on améliorer cette majoration triviale: densité de l'empilement $\leqq 1$? Il ne peut être question de l'améliorer pour un ensemble A quelconque, même si c'est une jauge, car si A est par exemple le cube défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}, ..., -\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2},$$

l'empilement $(A + \vec{g}, \vec{g} \varepsilon Z^n)$ recouvre l'espace, à un ensemble de mesure nulle près, donc la densité de l'empilement est égale à 1.

---

[1]) Comme les résultats sur l'équation de Pell sont équivalents à des résultats sur les « unités » du corps quadratique engendré par $\sqrt{d}$, les résultats sur l'équation $f(x_1, ..., x_n) = 1$ sont équivalents à des résultats sur les unités d'un corps de nombres algébriques de degré n, associé à f. Le cas considéré ici correspond aux corps dont tous les conjugués sont réels. Le cas général peut être traité à partir d'une extension du théorème sur les formes linéaires au cas des coefficients complexes.

Dans le cas des boules, BLICHFELDT (1914) est arrivé à un résultat remarquable: dans *l'espace à* n *dimensions, la densité d'un empilement de boules* $(B + \vec{g},\ g \varepsilon G)$ *a une densité toujours* $\leqq (n+2)/2\,(\sqrt{2})^n$. Ce résultat n'a pas été très sensiblement amélioré depuis; par ailleurs, il ne pourrait l'être que d'une façon limitée, car on a démontré *qu'il y a des empilements de boules de densité* $\geqq 1/2^{-n+1}$, résultat valable d'ailleurs pour toute jauge. (HLAWKA, 1944.)

Ce dernier résultat peut s'obtenir facilement à partir d'un théorème de moyenne dû à MAHLER, très analogue au théorème de Minkowski-Blichfeldt démontré précédemment, qui, lui, permet de démontrer la majoration de Blichfeldt. Nous nous contenterons de démontrer le résultat suivant: la densité des empilements de boules est $\leqq (n+1)/(\sqrt{2})^n$.

On démontre d'abord par une récurrence facile que si dans R^n, H est un système de $n+2$ points donnés, pour un point P quelconque de l'espace, il y a au moins une paire de points A, B de H tels que $A\widehat{P}B \leqq \pi/2$. (En effet, si les produits scalaires $< \overrightarrow{PX},\ \overrightarrow{PY} >$, $X \varepsilon H$, $Y \varepsilon H$, $X \neq Y$, étaient tous < 0, les projections sur l'hyperplan Π perpendiculaire à PA en P (A étant un élément arbitraire pris dans H) des points de H différents de A, formeraient dans cet espace à $n-1$ dimensions un système H' de $n+1$ points distincts avec $< \overrightarrow{PX'},\ \overrightarrow{PY'} > < 0$, $X' \varepsilon H'$, $Y' \varepsilon H'$, $X' \neq Y'$; et en itérant on aurait trois points distincts L, M, N sur une droite passant par P et tels que $< \overrightarrow{PL},\ \overrightarrow{PM} >$, $< \overrightarrow{PM},\ \overrightarrow{PN} >$ et $< \overrightarrow{PN},\ \overrightarrow{PL} >$ soient tous négatifs, ce qui est évidemment impossible.)

Soit alors un empilement $\{ B+\vec{g},\ \vec{g} \varepsilon G \}$ de boules, de rayon 1 pour fixer les idées, alors les centres de deux boules distinctes quelconques de l'empilement ont une distance $\geqq 2$. Il résulte alors du lemme précédent qu'une boule de rayon $\sqrt{2}$ ouverte et de centre C arbitraire $(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 < 2$ ne peut contenir plus de n+1 centres des boules empilées, centres qui sont les points de G. Or d'après le théorème de Minkowski-Blichfeldt on peut trouver C tel qu'une telle boule contienne un nombre de points de G supérieur ou égal à la mesure de la boule

(c'est-à-dire $(\sqrt{2})^n \Omega_n$), divisé par le déterminant de G. Par conséquent:

$$n + 1 \geqq (\sqrt{2})^n \Omega_n / \text{dét } (G) ,$$

ou encore:

$$\text{densité de l'empilement } = \Omega_n / \text{dét } G \leqq (n + 1)/(\sqrt{2})^n ,$$

c'est ce que nous nous proposions de démontrer.

Traduit sur γ_n, cela améliore le résultat de Minkowski par un coefficient multiplicatif $\dfrac{1 + \varepsilon(n)}{2}$

$$\gamma_n \leqq \frac{n}{\pi e} (1 + \varepsilon(n))$$

Le théorème de Hlawka cité plus haut montre

$$\gamma_n \geqq \frac{n}{2\pi e} (1 + \varepsilon(n)) .$$

On voudrait bien en savoir plus, en particulier si la densité peut être majorée par k^n avec $k < 1/\sqrt{2}$.

VI. Conclusion.

Ces quelques exemples peuvent donner une idée de l'efficacité des méthodes que Minkowski a introduites en Géométrie des nombres, ceux que nous avons donnés sont fondamentaux. Mais la variété des problèmes qui se posent est très grande. Pour l'étude des $f(x_1,\ldots,x_n)$ pour lesquels la figure associée $| f(x_1,\ldots,x_n) | \leqq 1$ est non bornée et de mesure infinie, seule une partie des problèmes peut être étudiée par les méthodes de Minkowski et d'autres techniques doivent être introduites.

Il faut signaler pour terminer que, si dans cet exposé on a insisté sur des résultats très généraux, où le nombre de dimensions de l'espace, c'est-à-dire le nombre des variables était indifférent, il y a encore des problèmes à un petit nombre de variables, intéressants et non résolus. Par exemple, appelant maintenant *empilement* une famille d'ensembles $(A + \vec{g}, \vec{g} \in H)$ disjoints deux à deux, H n'étant plus nécessairement un réseau, et *empilement régulier*, une telle famille, si H est un réseau, on ne sait pas encore s'il n'y a pas dans l'espace à trois dimensions