55. Corps à plus de deux classes doubles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

689 $= 13 \times 53$ (même cas) qui a deux cycles de type 2 et 3, d'un nombre pair d'idéaux (6 et 4) et un couple de cycles conjugués de type 4, de chacun quatre idéaux. Son groupe est d'ordre 4, cyclique;

904 $= 8 \times 113$ (deuxième cas), qui a deux cycles de type 1 contenant un et trois idéaux et trois couples de cycles conjugués de type 4, contenant respectivement trois, trois et cinq idéaux. Son groupe est d'ordre $2+2 \times 3 = 8$, cyclique.

55. Corps à plus de deux classes doubles.

Les conditions, énoncées ci-dessus, *suffisantes* pour qu'un corps contienne seulement une ou deux classes doubles d'idéaux, sont aussi *nécessaires:* si elles ne sont pas vérifiées par le discriminant, le corps a au moins trois classes doubles. Cette propriété peut être explicitée sous forme d'une condition suffisante analogue aux précédentes.

Un corps réel a *au moins trois classes doubles* d'idéaux lorsque son discriminant D a l'une des formes suivantes:

1. il est impair, nécessairement congru à $+1$, mod. 4, *égal à un produit* $u \times v \times w$, de trois nombres premiers, *congrus chacun à* $+1$, mod. 4;

2. il est pair, égal au *produit par* 4, *du double* $2d'$ d'un produit $d' = u' \times v'$, de deux nombres premiers, *congrus chacun à* $+1$, mod. 4;

3. Il est impair, nécessairement congru à $+1$, mod. 4, égal à un *produit de plus de trois nombres premiers impairs.*

4. Il est pair, produit par 4 d'un nombre impair d, congru à -1, mod. 4, ou du double $2d'$ d'un nombre impair d', *produit d'au moins trois nombres premiers impairs.*

Il est équivalent de dire que D vérifie ces conditions, ou ne vérifie pas les conditions précédentes; c'est ce qui résulte du tableau des diverses conditions:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">D impair $\equiv +1$</th><th colspan="2">D pair $= 4d$</th></tr>
<tr><th>d impair $\equiv -1$</th><th>$d = 2d'$, d' impair</th></tr>
<tr><td>1 seule classe double</td><td>D premier
— — — — — — — —
$D = u \times v$
u, v premiers $\equiv -1$</td><td>d premier</td><td>d' premier $\equiv -1$</td></tr>
<tr><td>2 classes doubles</td><td>$D = u \times v$
u, v premiers $\equiv +1$
— — — — — — — —
$D = u \times v \times w$
u, v, w premiers
u et $v \equiv -1$</td><td>$d = u \times v$
u, v premiers
$u \equiv -1$</td><td>d' premier $\equiv +1$
— — — — — — — —
$d' = u' \times v'$
u', v' premiers;
$u' \equiv -1$; v' impair</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 classes doubles au moins</td><td rowspan="2">$D = u \times v \times w$
u, v, w premiers
$\equiv +1$
4 facteurs premiers, au moins</td><td></td><td>$d' = u' \times v'$
u', v' premiers $\equiv +1$
— — — — — — — —</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 facteurs premiers impairs au moins</td></tr>
</table>

Dans les cas 1 et 2, D est décomposable de quatre façons en somme de deux carrés; le corps contient donc quatre idéaux semi réduits réfléchis.

D'autre part, il existe quatre idéaux doubles, dont les normes sont 1, u ou vw, v ou uw, uv ou w dans le premier cas, et 1, 2, u' ou $D{:}8u'$, $2u'$ ou $D{:}4u'$ dans le second cas.

Il y a donc *huit* idéaux semi réduits remarquables, donc quatre cycles, contenant chacun deux de ces idéaux et définissant chacun une classe double.

Dans les cas 3 et 4, il y a huit idéaux semi réduits doubles, au moins, dont les normes sont suivant les cas:

3 — 1, u ou $D{:}u$, v ou $D{:}v$, uv ou $D{:}uv$, w ou $D{:}w$, uw ou $D{:}uw$, vw ou $D{:}vw$, uvw ou $D{:}uvw$,

4 — 1, 2, u ou $D{:}u$, $2u$ ou $D{:}2u$, v ou $D{:}v$, $2v$ ou $D{:}2v$, uv ou $D{:}uv$, $2uv$ ou $D{:}2uv$;

si u, v, w sont des facteurs premiers impairs de D.

Il y a au moins huit idéaux semi réduits remarquables, donc au moins quatre cycles, définissant chacun une classe double.

Dans chacun de ces cas, le groupe des classes d'idéaux contient au moins deux éléments d'ordre 2, donc contient un sous-groupe, produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2.

TABLEAU XXX.

Exemples de corps à plus de deux classes doubles.

c	$D = 1\,105 = 5\times13\times17$ $-(x^2+x-276)$		
0	276		
1	274		
2	270	$= 15\times18$;	$I_9\times I_2$
3	264		
4	256	$= 16\times16$;	$U_3\times U_3$
5	246		
6	234	$= 13\times18$;	$I_6\times I_5$
7	220	$= 11\times20$;	$J_2\times J_9$
		$= 10\times22$;	$K_2\times K_9$
8	204	$= 12\times17$;	$K_5\times K_6$
9	186		
10	166		
11	144	$= 12\times12$;	$K_0\times K_0$
		$= 8\times18$;	$I_4\times I_7$
		$= 9\times16$;	$U_2\times U_4$
		$= 6\times24$;	$J_4\times J_7$
12	120	$= 10\times12$;	$K_{10}\times K_1$
		$= 8\times15$;	$I_8\times I_3$
		$= 6\times20$;	$J_8\times J_3$
		$= 5\times24$;	$J_6\times J_5$
13	94		
14	66	$= 6\times11$;	$J_1\times J_{10}$
		$= 3\times22$;	$K_8\times K_3$
15	36	$= 6\times6$;	$J_0\times J_0$
		$= 4\times9$;	$U_1\times U_5$
		$= 3\times12$;	$K_4\times K_7$
		$= 2\times18$;	$I_1\times I_{10}$
16	4	$= 2\times2$;	$I_0\times I_0$
		$= 1\times4$;	$U_0\times U_6$
....	....		

produit direct de 2 groupes cycliques d'ordre 2

$I\times J \sim K$

c	$D = 1\,365 = 3\times5\times7\times13$ $-(x^2+x-341)$		
0	341		
1	339		
2	335		
3	329		
4	321		
5	311		
6	299	$= 13\times23$;	$J_2\times J_1$
7	285	$= 15\times19$;	$K_3\times K_2$
8	269		
9	251		
10	231	$= 11\times21$;	$K_5\times K_0$
11	209	$= 11\times19$;	$K_1\times K_4$
12	185		
13	159		
14	131		
15	101		
16	69	$= 3\times23$;	$J_0\times J_3$
17	35	$= 5\times7$;	$I_0\times I_1$
		$= 1\times35$;	$U_0\times U_1$
....	....		

produit direct de 2 groupes cycliques d'ordre 2

$I\times J \sim K$

Les seuls corps, à plus de deux classes doubles, dont le discriminant D est inférieur à 1000, sont les cinq corps dont les discriminants sont:

$$
\begin{aligned}
D &= 520 = 8\times5\times13\\
D &= 680 = 8\times5\times17\\
D &= 840 = 8\times3\times5\times7\\
D &= 780 = 4\times3\times5\times13\\
D &= 924 = 4\times4\times7\times11
\end{aligned}
$$

Le groupe des classes d'idéaux de chacun de ces corps est le produit direct de deux groupes cycliques d'ordre 2.

Le tableau XXX donne deux exemples de calcul des idéaux semi réduits et de vérification de la structure des groupes pour les corps dont les discriminants sont:

$1\,105 = 5\times13\times17$, qui a un cycle de sept idéaux (U) et trois cycles de onze idéaux;

$1\,365 = 3\times5\times7\times13$, qui a deux cycles de deux idéaux, un cycle de quatre idéaux et un cycle de six idéaux.

On peut encore généraliser la construction des exemples précédents, pour obtenir des corps contenant exactement n classes doubles d'idéaux.

NOTE I

La théorie des corps de nombres algébriques, et plus précisément l'étude des propriétés arithmétiques de leurs entiers, a pour origine des travaux de K. F. Gauss (1777-1855). Gauss a introduit la notion d'entier algébrique et établit les propriétés de divisibilité des entiers de quelques corps particuliers. Mais c'est seulement E. E. Kummer (1810-1893) qui a introduit la notion essentielle d'idéal, dans un anneau d'entiers algébriques, permettant d'obtenir des propriétés arithmétiques dans tout corps de nombres algébriques de degré fini. Cette notion a été précisée et développée, dans le cours du XIX^{e} siècle, surtout par l'école allemande: R. Dedekind (1831-1916), L. Kronecker