47. Détermination des cycles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les limites pour i infini des multiplicateurs ρ_i et des éléments α_i résultent de leur appartenance à des progressions géométriques. La raison ω, de ces progressions est le produit de quotients $(\theta - c_i) : m_i$ (i de 0 à $h-1$) positifs et inférieurs à 1; elle est donc inférieure à 1, d'où les limites des termes des progressions.

La croissance des éléments α_i et de leurs conjugués α'_i, et la comparaison (des signes) des éléments consécutifs, résulte de leur construction au moyen des bases de $\mathbf{M}_i$, qui sont semi réduits:

$$\alpha_{i+1} : \alpha_i = [\rho_i \times (\theta - c_i)] : [\rho_i \times m_i] = (\theta - c_i) : m_i < 1,$$
$$\alpha'_{i+1} : \alpha'_i = [\rho'_i \times (\theta' - c_i)] : [\rho'_i \times m_i] = (\theta' - c_i) : m_i < -1.$$

47. Détermination des cycles.

La considération de la suite des bases de $\mathbf{M}_0$ permet d'établir que les cycles d'idéaux semi réduits représentent les classes *proprement.*

Théorème de la détermination des cycles. — Dans un corps réel, *chaque classe d'idéaux contient un et un seul cycle d'idéaux semi réduits.*

En définissant les idéaux (canoniques) réduits (**20**), pour un corps quadratique quelconque (réel ou imaginaire), il a été établi que toute classe d'idéaux contient au moins un idéal $\mathbf{M}_0$ réduit, qui, pour un corps réel, est, a fortiori, semi réduit (**40**). La classe renferme, par suite, le cycle des idéaux réduits $\mathbf{M}_i$, obtenus en formant les suivants successifs de $\mathbf{M}_0$, puisque ces idéaux sont congrus à $\mathbf{M}_0$.

Pour établir que le cycle ainsi construit est unique, on peut d'abord démontrer que:

dans un idéal $\mathbf{M}_0$ semi réduit, *pour qu'une base arithmétique libre*, de deux éléments positifs $\gamma_j > \gamma_{j+1}$, *appartienne à la suite des bases*, $\alpha_i\, \alpha_{i+1}$, associée au cycle d'idéaux semi réduits engendré par $\mathbf{M}_0$, *il faut et il suffit que*: ces termes et leurs conjugués vérifient les comparaisons:

$$\gamma_{j+1} : \gamma_j < 1; \qquad \gamma'_{j+1} : \gamma'_j < -1;$$

la première résulte de l'ordre adopté pour numéroter les deux termes.

La condition est *nécessaire* puisqu'elle a été vérifiée ci-dessus pour la suite des bases α_i.

Pour démontrer qu'elle est *suffisante*, il peut être commode d'établir d'abord que pour un idéal qui a une base vérifiant ces conditions (même s'il n'est pas semi réduit):

tout élément non nul ξ, de cet idéal, dont la valeur absolue n'est égale ni à γ_j, ni à γ_{j+1}, *vérifie l'une*, au moins, des *comparaisons*:

$$|\xi| > \gamma_j > \gamma_{j+1}; \quad \text{ou} \quad |\xi'| > |\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_j|.$$

Cet élément ξ peut être construit par additions et soustractions au moyen des termes de la base considérée, de sorte que:

$$\xi = x\gamma_j + y\gamma_{j+1}; \quad \xi' = x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}; \quad x, y \text{ nombres entiers.}$$

Il suffit alors d'examiner les divers cas, dépendant des signes et de la nullité des entiers x, y:

$$xy > 0: |\xi| = |x\gamma_j + y\gamma_{j+1}| = |x\gamma_j| + |y\gamma_{j+1}| > \gamma_j;$$
$$xy < 0: |\xi'| = |x\gamma'_j + y\gamma'_{j+1}| = |x\gamma'_j| + |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|;$$
$$y = 0 \quad \text{et} \quad |x| \neq 1: |\xi| = |x\gamma_j| > \gamma_j;$$
$$x = 0 \quad \text{et} \quad |y| \neq 1: |\xi'| = |y\gamma'_{j+1}| > |\gamma'_{j+1}|.$$

On peut mettre la disjonction ainsi vérifiée sous la forme d'implications:

$$|\xi| < \gamma_j \quad \Rightarrow \quad |\xi'| \geqslant |\gamma'_{j+1}|;$$
$$|\xi'| < |\gamma'_{j+1}| \quad \Rightarrow \quad |\xi| \geqslant \gamma_j.$$

Ceci acquis, on compare, dans $\mathbf{M}_0$, à la suite des bases $\alpha_i \; \alpha_{i+1}$, une base $\gamma_j \; \gamma_{j+1}$ vérifiant la condition indiquée. La suite des α_i décroissant de $+\infty$ à $0, \gamma_j$ est situé dans l'un des intervalles, il existe i, tel que:

$$\alpha_i \geqslant \gamma_j > \alpha_{i+1}.$$

Il y a égalité, si non d'après la propriété précédente, appliquée à γ_j comparée à la base des α, puis à α_{i+1}, comparée à la base des γ:

$$\gamma_j < \alpha_i \quad \Rightarrow \quad |\gamma'_j| > |\alpha'_{i+1}| \quad \Rightarrow \quad \alpha_{i+1} > \gamma_j;$$

ce qui est contradictoire avec le choix de α_i.

On peut alors comparer α_{i+1} à la base $\gamma_j = \alpha_i, \gamma_{j+1}$; il en résulte:

$$\alpha_{i+1} < \alpha_i = \gamma_j \quad \Rightarrow \quad |\alpha'_{i+1}| \geqslant |\gamma'_{j+1}|.$$

La dernière comparaison est une égalité, si non la comparaison de γ_{j+1} à la base des α entrainerait:

$$|\gamma'_{j+1}| < |\alpha'_{i+1}| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{j+1} > \alpha_i = \gamma_j,$$

ce qui est contradictoire avec la définition de la base des γ.

L'égalité des valeurs absolues $|\gamma'_{j+1}| = |\alpha'_{i+1}|$ entraîne celle des conjugués $\gamma_{j+1} = \alpha_{i+1}$, puisqu'ils sont positifs.

Le théorème résulte aisément de cette propriété préalable: si un idéal $\mathbf{M} = (m, \theta—c)$, semi réduit, de racine finale c, est congru aux idéaux $\mathbf{M}_i$ d'un cycle et notamment à $\mathbf{M}_0$, dans lequel est construit une suite de bases $\alpha_i\, \alpha_{i+1}$, il existe un élément ρ, qui peut être choisi positif, tel que $(\rho)\times\mathbf{M}$ soit égal à $\mathbf{M}_0$. Le couple d'éléments:

$$\gamma_j = \rho\times m \quad \gamma_{j+1} = \rho\times(\theta—c)$$

est une base arithmétique libre de $\mathbf{M}_0$, qui vérifie les conditions précédentes et qui par suite est égale à une des bases de la suite:

$$\rho\times m = \alpha_i = \rho_i\times m_i \quad \rho\times(\theta—c) = \alpha_{i+1} = \rho_i(\times\theta—c_i).$$

Dans la dernière égalité, la comparaison des coefficients de θ montre que:

$$\rho = \rho_i, \quad m = m_i, \quad c = c_i, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_i.$$

Tout idéal **M**, *semi réduit, congru aux idéaux d'un cycle d'idéaux semi réduits est égal à un idéal de ce cycle.*

48. Diviseurs de l'unité.

Théorème des diviseurs de l'unité (II). — Dans un corps réel, pour chacun des cycles d'idéaux semi réduits, désignés par leurs racines finales:

$$\mathbf{M}_i = (m_i, \ \theta—c_i); \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1;$$

les diviseurs de l'unité sont égaux aux produits par $+1$ *et* $—1$ *des puissances* ω^λ, (d'exposants λ entiers quelconques) *de*:

$$\omega = [\Pi(\theta—c_i)]:[\Pi m_i]; \qquad i \text{ de } 0 \text{ à } h—1.$$

Cette expression a la même valeur pour tous les cycles du corps.