

Théorie de l'approximation.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORIE DE L'APPROXIMATION.

Toute l'analyse numérique est dominée par l'idée d'approximation, dès l'instant où on accepte l'inévitable exigence du calcul: celui-ci comporte, en effet, toujours une *discrétisation* du problème proposé. D'une part, on remplace des opérateurs de l'analyse (avec passages à la limite) par des opérateurs finis, d'autre part on remplace les fractions décimales illimitées par des fractions limitées; laissons pour l'instant de côté les approximations dues à l'emploi d'un nombre limité de chiffres pour la représentation des nombres (*les erreurs d'arrondi*) pour nous limiter aux erreurs que l'on peut appeler *erreurs de méthode*.

On peut alors, pour préciser le problème de l'étude de ces erreurs, poser ceci: *une fonction étant bien définie par un certain nombre d'algorithmes relevant de l'analyse, former une expression n'utilisant que des algorithmes d'une classe restreinte et qui constitue une approximation, dans un sens à préciser, de la fonction donnée.*

Par exemple: une fonction satisfait à une équation différentielle, avec des conditions qui garantissent l'existence d'une seule solution, on demande de former une fonction rationnelle de degré maximum donné qui s'écarte le moins possible de cette solution.

En ce qui concerne les fonctions d'une seule variable, les études dans ce domaine sont bien avancées; elles ont montré l'importance des idées de Tchébycheff qui, avec Gauss, apparaît toujours plus comme un des grands précurseurs de l'analyse numérique moderne; pour des fonctions de plusieurs variables, on est aujourd'hui beaucoup moins avancé; c'est au reste un des domaines qui, pour l'instant, retient le plus l'attention des chercheurs, et il faut s'attendre à de grands progrès dans un proche avenir.

Comme on l'a vu, un problème d'approximation est toujours lié à une sorte de mesure de l'erreur. Dans de nombreux cas, une méthode d'approximation étant donnée, on recherche une *borne d'erreur*; cette borne est souvent donnée par des dérivées d'ordre plus ou moins élevé d'une fonction: par exemple le reste de Lagrange dans un développement taylorien donne une expres-

sion pour l'erreur commise en remplaçant une fonction par un polynôme obtenu d'une certaine manière. C'est dans cette voie que l'on obtient souvent le plus facilement des résultats formels, malheureusement d'un emploi ultérieur fréquemment malcommode. Par exemple, on ne possède à ma connaissance aucune expression de ce type, effectivement utilisable, pour exprimer l'erreur commise en remplaçant le laplacien par un opérateur aux différences dans le problème de Dirichlet.

On a pu, dans certains cas, donner des bornes d'erreur où interviennent des hypothèses un peu différentes sur les fonctions en jeu. Prenons par exemple les formules de quadrature approchée. En supposant que la fonction sous le signe somme est analytique dans une ellipse ayant ses foyers aux extrémités de l'intervalle d'intégration, on obtient des bornes d'erreur qui ne font intervenir que l'excentricité de cette ellipse et l'intégrale du module de la fonction sur son intérieur; ces bornes se révèlent beaucoup plus maniables et souvent plus fines que celles que fournit la considération de dérivées d'ordre plus ou moins élevé.

On peut également étudier ces erreurs d'un point de vue probabiliste: partant de la remarque qu'une étude d'erreurs considère en fait toujours un ensemble de données possibles, on peut rechercher non pas une *borne* mais une *moyenne*, ce qui suppose la définition d'une mesure dans l'ensemble des données considérées, mesure qui s'interprète naturellement dans un langage probabiliste.

L'étude du conditionnement (très défavorable) de la matrice de Hilbert montre combien sont dangereuses certaines méthodes de moments. Supposons que l'on désire dans $(0,1)$ une approximation optimum en moyenne quadratique d'une fonction $f(x)$ par un polynôme $P(x) = \sum a_k x^k$; en prenant le minimum de

$$\int_0^1 [f(x) - P(x)]^2 dx$$

on obtient pour les a_k un système algébrique linéaire dont la matrice a précisément le terme général

$$\frac{1}{i+k+1}$$

d'où l'on peut conclure (après Todd) qu'elle est très mal conditionnée; ceci explique les résultats souvent très peu favorables obtenus dans un tel cas.

LES ERREURS D'ARRONDI.

C'est dans l'étude de ces erreurs qu'il est peut-être le plus utile de combiner les recherches théoriques et les études expérimentales. Le nombre des circonstances qu'il est possible d'envisager a priori est si grand, la complexité des relations est telle, qu'il n'est pas raisonnable de se lancer dans des recherches sans avoir quelques idées sur ce qui peut se passer dans tel ou tel cas: en peu de temps (moins d'une heure souvent) une calculatrice électronique peut nous fournir, sur la base d'exemples bien choisis, une information qui évitera ensuite peut-être des semaines de recherches infructueuses; c'est précisément par des essais, faits non pas au hasard mais en tirant parti d'un certain empirisme, que l'on a eu la révélation de phénomènes d'instabilité dus aux erreurs d'arrondi, par exemple dans l'intégration numérique d'équations différentielles; on a pu faire ensuite une étude approfondie des causes de cette instabilité, étude qui a montré que de nombreuses méthodes qui semblaient acceptables sont inutilisables, dès que l'on ne se limite plus à quelques pas d'intégration.

On a vu plus haut combien les erreurs d'arrondi peuvent exercer une influence considérable sur la résolution d'une équation algébrique. Elles peuvent également rendre totalement illusoire certaines méthodes d'approximations successives.

ANALYSE NUMÉRIQUE ET THÉORIE DES JEUX.

Sous des aspects parfois fort différents, la théorie des jeux commence à fournir des moyens d'aborder efficacement des problèmes d'analyse numérique. En voici un exemple: considérons la résolution numérique d'une équation $f(x) = 0$; une méthode est théoriquement acceptable si elle fournit un moyen de former une suite d'intervalles emboîtés, de longueur tendant vers zéro et contenant une racine de l'équation; pour cela il faudra faire