

DES PRINCIPES DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Autor(en): **Kurepa, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35491>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DES PRINCIPES DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

par G. KUREPA, Zagreb

(Reçu le 1^{er} juillet 1955.)

Enseigner consiste à transmettre à la jeunesse une certaine somme de savoir et surtout à développer chez elle la faculté d'assimiler, d'augmenter, de diffuser ses acquisitions culturelles.

A la lumière de découvertes récentes (voir KUREPA (2), § 7), il est utile d'examiner de plus près les problèmes de l'enseignement. Les quelques idées exposées ci-dessous attirent particulièrement l'attention sur l'importance des méthodes ensemblistes-fonctionnelles, de la méthode directe et du principe feedback (ou de l'autoinduction).

1. L'ENSEIGNEMENT ET LE GROUPE SOCIÉTÉ ELÈVE — PROFESSEUR.

Jusqu'à présent, l'enseignement a été considéré trop étroitement comme un simple rapport entre l'enseignant et l'enseigné: on a dit qu'il est une fonction à deux variables, l'enseignant et l'enseigné. Et cependant il existe une troisième variable extrêmement complexe et importante: le milieu social. Car la vie quotidienne, la profession et le milieu ont une influence profonde sur notre formation et plus particulièrement sur celle des jeunes.

L'enseignement est un processus dans lequel le milieu social, l'enseignant et l'enseigné s'influencent mutuellement.

En premier lieu, il est évident que l'ambiance sociale exerce une influence sur les jeunes. L'action réciproque existe-t-elle aussi? Certes oui, puisque la jeunesse actuelle, dans un avenir prochain, sera le principal agent de l'évolution de la Société.

D'autre part, il est certain que les rapports de l'enseignant et de l'enseigné suivent le même processus feedback quoique, jusqu'à présent, on n'ait guère pris en considération que la seule influence de l'enseignant sur l'enseigné. Pourtant les enseignés,

eux aussi, exercent une action sur l'enseignant en lui transmettant, collectivement, les influences venues de l'extérieur (vie familiale, sport, radio, presse, cinéma, télévision, etc.).

Il faut tenir compte des forces immenses et des possibilités que recèle la jeunesse. L'un des buts essentiels de l'enseignement est d'orienter correctement et d'utiliser cette puissance. On peut l'employer à contribuer activement à l'enseignement. L'enseignant assumera alors un rôle de conseiller, de coordinateur et d'arbitre. *A côté de l'individu-enseignant surgit alors un autre bâtisseur actif de l'enseignement : l'ensemble des enseignés.* (Groupes de travail, séminaires, laboratoires, etc. dirigés par des élèves.)

Ce n'est pas seulement l'individu-enseignant qui crée; l'ensemble des enseignés a aussi une influence considérable tant active que passive sur l'enseignement.

Il faut, enfin, reconnaître que le contact individuel direct entre enseignants et enseignés n'est plus possible lorsque le rapport des uns et des autres devient trop grand. Il est impersonnel et indirect lorsqu'il se fait par l'intermédiaire des livres, de la radio, de la télévision, etc.

Bref, enseignant, enseigné et milieu social sont trois variables agissant l'une sur l'autre. En particulier, les variations de l'une d'entre elles se reflètent sur les autres de manière que s'établisse « le rapport optimum vers l'état variable désiré ». C'est donc que l'enseignement est un processus feedback relativement au « triangle » Société-Elève-Professeur aussi bien que par le couple Enseignant-Enseigné ¹⁾.

2. L'EFFORT CRÉATEUR, DES APPLICATIONS ET L'ENSEIGNEMENT.

A tous ses degrés l'enseignement doit être intimement lié aux efforts créateurs de la Société et en particulier aux points de vue nouveaux et aux progrès des sciences.

1) « Feedback control is an operation which, in presence of disturbing influences, tends to reduce the difference between the actual state of a system and an arbitrarily varied desired state and which does so on the basis of this difference. In less general feedback control processes, there may be no disturbing influences, or the desired state of the system may remain constant. » (W. R. AHRENDT-J. F. TAPLIN [1], p. 1.).

En ce qui concerne la théorie et des applications de processus feedback, nous renvoyons le lecteur à ce livre. Cela vaudrait la peine d'examiner de plus près le processus d'enseignement en tant qu'un processus feedback

On ne peut tolérer que puisse se créer un fossé entre l'enseignement d'une discipline, d'une part, et l'effort de recherches et l'épanouissement de cette discipline, d'autre part. L'enseignement doit être actuel. En particulier, il n'est pas nécessaire d'adopter toujours un style historique, puisque très fréquemment les nouvelles découvertes n'ont été faites qu'au prix de détours incroyables. Il faut donc, dans l'enseignement courant, procéder de façon plus directe et n'utiliser les données et les documents historiques que pour des cas particuliers.

L'enseignement et ses résultats doivent être examinés scientifiquement pour leur valeur sur le plan psychologique et sur le plan mathématique, en particulier à l'aide de la statistique (tests, etc.), en recherchant quel est le meilleur des résultats obtenus par les différentes méthodes d'enseignement. En outre, il importe de distinguer ce qui est valable statistiquement de ce qui l'est individuellement et de tenir compte de ces deux points de vue.

L'enseignement doit faire état des applications possibles et procéder à de larges tours d'horizon. En particulier, il vaut mieux — dans un enseignement de large audience — faire ressortir les points de vue nouveaux et les applications que de se perdre avec pédantisme dans les finesses logiques de démonstrations longues et complexes; mettre en évidence, dans les nouvelles découvertes, ce qui est inspiré par la pratique de la vie, par les phénomènes naturels ou sociaux, etc.; insister sur les relations entre les sciences étudiées et les autres domaines. Tout particulièrement les Mathématiques doivent être en contact intime avec les Sciences physiques.

3. ENSEMBLES — TRANSFORMATIONS — STRUCTURES.

En Mathématiques se sont introduites les notions fondamentales d'ensemble et de transformation. Les ensembles sont des champs d'application des opérations (transformations) tandis que celles-ci servent de matériaux pour l'édification de nouveaux ensembles. La théorie des ensembles — véritable atomistique de la mathématique — est un exemple du reflet de la vie quotidienne sur des sciences.

La théorie des ensembles sert de base non seulement aux Mathématiques mais aussi à d'autres sciences. Dans la méthode ensembliste interviennent aussi bien les éléments logiques-rationalistes que l'intuition directe. Toute opération mathématique doit être examinée du point de vue ensembliste; en particulier, il faut étudier l'effet des diverses transformations sur la relation entre un tout et ses parties. Par exemple: du point de vue ensembliste, une fraction se compose de deux parties (numérateur et dénominateur) et, dès lors, il faut expliciter comment, dans un résultat, ces deux parties sont issues des parties analogues de certaines fractions initiales.

Tout espace est un ensemble. De cela aussi il faut tenir compte dans l'enseignement géométrique, même élémentaire. De l'organisation ou de la structure d'un ensemble dépend la science ou le domaine de la science qui en permettra l'étude. Cette notion de structure est récente; citons comme exemples: les relations, les structures algébriques et topologiques.

Quant aux transformations, elles se rencontrent partout. Elles mettent en relation non seulement des nombres et des nombres, des nombres et des points (sur un axe, dans le plan, sur une sphère...), des angles et des angles, mais aussi des éléments plus abstraits: des opérations et des opérations, etc. Ainsi à l'addition est associée l'antiaddition (soustraction), à la multiplication l'antimultiplication (division), au carré l'anticarré, au cube l'anticube, à la puissance x^n l'antipuissance $x^{1/n}$, à la fonction f l'antifonction $\neg f$ ou f^{-1} , à la projection l'antiprojection, à la dérivée Df de f l'antidérivée $\neg Df$ ou $D^{-1}f$ ou $\int f(x) dx$ de f , etc.¹⁾.

Les considérations ensemblistes s'adaptent bien à l'utilisation des *constantes logiques*: *et*, *ou*, *non* et des *quantificateurs logiques*: *chaque*, *au moins un*, ce qui est très important surtout en Mathématiques supérieures.

1) En particulier on pourrait appeler les extractions de racines carrées, cubiques, etc. anticarré, anticube, etc. et de les noter respectivement $x^{1/2}$, $x^{1/3}$, etc. au lieu de $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, etc.

L'antiprojection d'un point T de l'espace euclidien R^5 à s dimensions par rapport à l'espace R^t ($s < t$) est l'espace euclidien vérifiant les conditions: 1° il contient T , 2° il est contenu dans R ; 3° il est perpendiculaire à R^s .

4.

Dans l'enseignement, l'étude de l'individuel et du particulier doit suggérer et provoquer l'étude du collectif et du général. Ceci fait apparaître les relations: individuel-collectif, particulier-général, simple-composé, etc. Ce sont là d'utiles exemples de transformations et de connexions. Les processus feedback en sont d'autres. Le passage d'un exemple concret à une théorie englobant cet exemple, puis l'utilisation de cette théorie pour des applications est un principe très utile et très important qui entre dans le cadre de ces considérations.

5. MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT.

Insistons sur un point: Bien que, dans une discipline donnée, il y ait des résultats particuliers importants et utiles, l'élève apprend plus en les étudiant comme des applications de *diverses méthodes*. L'enseignement doit non seulement offrir des résultats pétrifiés mais il doit les englober dans une science vivante permettant la création et les applications: ainsi l'élève acquiert l'esprit et la volonté du travail ainsi que des réflexes adaptés aux cas qui se présentent.

Savoir s'orienter à partir de conditions données; choisir, parmi toutes les possibilités offertes, la meilleure, ou presque, voilà l'un des buts de l'enseignement.

En particulier, en Mathématiques s'offrent de nombreuses méthodes de travail telles que: 1^o méthode expérimentale; 2^o méthode inductive; 3^o méthode axiomatique et déductive; 4^o méthode intuitive; 5^o méthode ensembliste; 6^o méthode directe; 7^o méthode statistique; 8^o méthode numérique; 9^o méthode analyste; 10^o méthode algébrique, etc.

Rares sont les problèmes qu'on peut explorer complètement à l'aide d'une seule méthode. Aussi faut-il cultiver les méthodes mixtes en mettant l'accent sur l'une ou l'autre des composantes de la méthode suivant le cas étudié. Le « principe d'universalité » exige de savoir si, dans un cas, il est possible de remplacer une méthode par une autre. On a beaucoup disserté des diverses

méthodes. Nous tenons à dire quelques mots de la méthode directe.

6. LA MÉTHODE DIRECTE, ÉLIMINATION DES INTERMÉDIAIRES NON NÉCESSAIRES.

Les considérations ensemblistes constituent un des exemples les plus importants de la méthode directe.

6.1 On étudie un ensemble en opérant directement sur les éléments de cet ensemble sans faire appel à des éléments extérieurs, fussent-ils des nombres.

6.2 Pour définir un logarithme on peut se servir de l'égalité :

$$10^{\log x} = x \text{ au lieu du système } 10^t = x, t = \log x$$

en évitant ainsi l'intermédiaire t . La première définition, plus directe, fait voir immédiatement que le logarithme est un exposant; elle fait voir aussi que la recherche du logarithme et celle de l'antilogarithme sont des opérations réciproques.

6.3 Pour définir l'anticarré $x^{1/2}$ on peut se passer du symbole $\sqrt{x}$. De façon plus générale, il est inutile d'introduire le symbole $\sqrt[r]{x}$ puisque $x^{s/r}$ peut être immédiatement utilisé. On gagne beaucoup en éliminant systématiquement une notation particulière (racine $n^{\text{ième}}$) dont les lois particulières sont difficiles à apprendre, alors que les dites lois, énoncées dans un cadre plus général (puissances fractionnaires), revêtent un caractère simple et clair. Peut-être vaudrait-il mieux, par exemple, employer la notation fonctionnelle $j^n x$ pour x^n comme le propose K. MENGER.

6.4 En définissant la fonction $f(x)$, il est inutile d'écrire toujours $y = f(x)$.

6.5 Dans une classe une méthode directe et active consiste à partager la classe en groupes se stimulant ou s'aidant les uns les autres. Au lieu d'enseigner avec dogmatisme et d'exiger la discipline selon le schéma classique, le professeur doit alors coordonner et conseiller. Dans ce cas, ce qui est direct c'est que l'ensemble des élèves assume, par ses propres moyens, presque toutes les responsabilités de l'enseignant et que celui-ci, considéré

comme intermédiaire entre les enseignés et les outils de l'enseignement (livres, etc.) est presque éliminé.

6.6 Le contrôle des résultats de l'enseignement des mathématiques doit être fait par des moyens propres aux mathématiques.

6.7 L'emploi de films, modèles, etc. est un aspect de la méthode directe.

7. QUELQUES PRINCIPES APPLIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT.

7.1 *Les processus feedback* (interpénétration mutuelle): il s'agit d'un phénomène extrêmement général que nous avons décrit précédemment. En voici quelques applications à l'enseignement:

7.1.1 *L'enseigné, l'enseignant et le milieu social* (voir § 1).

7.1.2 *L'enseignement et l'effort scientifique* (voir § 2).

7.1.3 *L'inversion* (en logique en particulier) peut être considérée comme un cas particulier de processus feedback. Un jugement logique consiste à étudier la vérité d'une conclusion à partir de prémisses données. Et l'on sait combien il est utile d'étudier la validité de la réciproque d'une proposition. Ainsi apparaît l'utilité et la fréquence des processus feedback. En ce sens on peut étudier la question de l'équivalence des équations. Une perturbation, dans une équation, peut être la multiplication par une quantité, ou tout autre transformation de l'équation. Une suite de transformations permet d'arriver, à partir de $f(x) = 0$, à une équation de la forme $x = a$.

7.2 *Le principe d'orientation ou de direction.* — Dans un processus il faut préciser s'il est possible de distinguer un sens dans le déroulement du processus. Par exemple, on dit que les enfants saisissent plus facilement la notion de nombre ordinal que celle de nombre cardinal, celle d'une direction que celle d'une droite, celle d'un intervalle dirigé que non dirigé...

Il faut différencier un processus du processus inverse ou anti-processus. Il nous paraît naturel d'utiliser le signe « — » dans l'étude des symétries et de désigner par — T le symétrique du

point T (par rapport à un point, une droite ou un plan). Comme exemple du principe d'orientation, on peut mentionner la nécessité, dans une démonstration, d'aller des prémisses à la conclusion. La possibilité de la marche inverse est à étudier.

7.3 *Principe de l'optimum.* — Au lieu de l'extremum simple (minimum ou maximum), il vaut mieux se conformer au principe de l'optimum. Ni une généralisation trop vaste, ni une concrétisation trop poussée ne sont les meilleures méthodes. La recherche de l'optimum dans le degré de concrétisation doit nous guider. Citons l'exemple du § 7.2: le nombre ordinal est plus compréhensible que le nombre cardinal, ce dernier étant une abstraction supérieure.

7.4 *Le principe de l'expansion.* — Dans les couples cause-effet, actif-passif, concret-abstrait, particulier-général, simple-composé, pratique-théorique, etc., les deux éléments doivent être considérés séparément et simultanément. L'un des aspects doit suggérer l'autre, chaque aspect est inséparable de l'autre.

Comme application de ce principe, on peut faire remarquer que dans le couple professeur-élève, ce dernier peut s'acquitter de certains droits et devoirs du premier: contrôle, explications, travaux pratiques, organisation, etc. L'ensemble des élèves a une tendance à devenir indépendant des enseignants professionnels. Le milieu social (sport, livres, etc.) exerce dans ce sens une pression très importante.

Un tel principe peut donner d'utiles résultats dans l'enseignement des mathématiques par la façon de poser des questions, des problèmes, etc. Le principe de permanence en arithmétique est un cas particulier du principe d'expansion: il permet d'appliquer certaines règles dans des domaines plus généraux que ceux pour lesquels elles ont été établies.

7.5 *Le principe du parallélisme et de coopération.* — Un même phénomène peut être examiné de différentes manières, sous différents aspects à l'aide de moyens différents (raison, vue, toucher, parole, etc.). Cela demande une harmonisation des notations, nomenclature, etc. Il y faut se placer au point de vue le plus général de synthétisation. Par exemple, il faut parler de l'angle d'une droite d et d'un plan p sans y ajouter des attributs superflus. Il est aussi utile de faire un parallèle entre la genèse

et les généralisations successives des notions de nombre et d'angle (angles de vecteurs, de plans, de courbes, etc.).

7.6 *Le principe de conservation des symboles.* — Si une même relation peut s'exprimer de deux façons différentes, il faut exiger que les deux expressions emploient les mêmes symboles ou au moins montrer ce que devient et d'où provient chaque élément. Il en est bien ainsi dans :

$$a + b = c \longleftrightarrow a = c - b$$

$$a^b = c \longleftrightarrow a = c^{1/b} \longleftrightarrow b = \log_a c .$$

Pour cette raison, en partant de $a^2 = c$, il faut préférer la notation $a = c^{1/2}$ à la notation $a = \sqrt{c}$. La disposition d'un symbole doit exprimer le rôle que joue ce symbole.

7.7 *Hiérarchie des symboles.* — Un symbole doit se présenter à sa place naturelle. Cependant il ne faut pas trop en limiter le champ d'utilisation. Le symbole « — » peut être utilisé non seulement dans les relations entre les nombres mais aussi il peut désigner deux directions opposées telles que antérieur-postérieur, d'un côté-de l'autre côté, positif-négatif, etc. Ainsi le symétrique d'un point T peut être désigné par (— T). La loi de l'idempotence — (— T) = T est bien vérifiée. Cela donne une idée valable de la loi de multiplication des nombres négatifs : — x représente sur un axe dirigé le symétrique, par rapport à 0, du point x ; d'autre part, — x veut dire aussi — I . x (ce qui ne choque pas les enfants). Dès lors, par exemple :

$$-2 \cdot -3 = -2 \cdot (-1 \cdot 3) = (-2 \cdot -1) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 .$$

Bien entendu cela suppose la multiplication associative, ce que chacun admet volontiers. A ce sujet, rappelons que STENDHAL, dans son autobiographie, décrit le véritable choc, ressenti toute sa vie, à l'idée de la multiplication des nombres négatifs.

La partie commune à deux droites doit être notée $a \cap b$ et non $a \times b$. L'emploi de parenthèses n'est pas nécessairement subordonné au fait qu'un crochet ou une accolade ne doit pas être enfermé dans une parenthèse, surtout si l'on utilise des transformations conservant une parenthèse, un crochet, etc.

7.8 *Le principe de solidarité ou de clôture.* — En étudiant une opération, il importe de se demander si le résultat de cette

opération sort ou non du domaine initial. Rappelons une anecdote de Turgenev :

Jean disait à Anne : « Que ce Philippe est bête ! Il a dit que trois plus quatre font huit.

— Ce n'est rien, répond Anne, sa sœur, à la même question, a répondu que trois plus quatre font... lampe ! »

Dans la première réponse, le principe du groupe (solidarité) est respecté, dans la seconde il ne l'est pas.

8. L'ENSEIGNEMENT ET LA C.I.E.M.

Nous nous trouvons devant une réforme radicale de l'enseignement des mathématiques. Plus précisément ce sont les notions d'ensemble, de transformation et de structure qui doivent jouer un rôle actif dans l'enseignement. La méthode statique d'Euclide doit céder la place à des méthodes plus vivantes et plus directes et n'être plus considérée que comme l'une des méthodes possibles.

Quel doit être le rôle de la C.I.E.M. devant de tels problèmes ? La C.I.E.M. ne doit pas être simplement un organisme de coopération internationale dans le domaine de la culture mathématique. La C.I.E.M. doit également jouer un rôle *actif et initiateur*. L'un de nos devoirs est de rechercher pratiquement une issue aux difficultés présentes de l'enseignement des Mathématiques. Nous devons faire des expériences à ce sujet en en précisant bien les données et les résultats. L'organisation de colloques réguliers destinés à étudier la mise à l'épreuve de la vie pratique et de la vie scolaire des résultats les plus récents, constituera une des voies pour atteindre nos buts. De même, l'une de nos tâches est d'encourager la publication de manuels fondés sur les principes nouveaux, débarrassés du lourd fardeau de fastidieuses acquisitions historiques et prônant des points de vue plus directs et plus intuitifs.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARENDS, W. R., J. F. TAPLIN, 1. *Automatic Feedback Control*. McCrart, New York-Toronto-London, 1951, 14+412.
2. KUREPA, G., Sur le rôle du mathématicien et des mathématiques à l'époque actuelle. *Enseignement mathématique*, 1 (1955), 93-111.