**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 4 (1958)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE

**Autor:** Salem, Raphaël

**Kapitel:** 5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-34640

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

la série qui converge vers zéro hors de P est une série de Fourier-Stieltjes.

Donc, en particulier, pour montrer que P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction continue non décroissante, constante dans chaque intervalle contigu à P (mais non partout) et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes tendent vers zéro — c'est la méthode employée par Menchoff.

Il est plus compliqué de démontrer, en se servant des mêmes idées, qu'un ensemble parfait P est un ensemble U. Il faut évidemment montrer qu'il n'existe pas de fonction à variation bornée constante dans les intervalles contigus à P et à coefficients de Fourier-Stieltjes tendant vers zéro. Mais cela ne suffit pas: il faut encore montrer qu'il n'existe aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle contigu à P et dont les coefficients de Fourier soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En fait, on ne s'est jamais, à notre connaissance, servi de cette méthode pour montrer qu'un ensemble E est un ensemble U. On l'a toujours fait en montrant que E appartient à une catégorie d'ensembles (par exemple H) qui sont connus pour être des ensembles d'unicité.

## 5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Les ensembles de Cantor à rapport constant $\xi$ sont, quand $\xi$ est l'inverse d'un entier (comme pour l'ensemble ternaire classique de Cantor) du type H et donc, d'après le théorème de Rajchman, des ensembles U. Il était naturel de se demander si ces ensembles peuvent être des ensembles M pour certaines valeurs de $\xi$ et dans l'affirmative de déterminer les valeurs de $\xi$ pour lesquelles l'ensemble est un ensemble d'unicité ou de multiplicité.

Nina Bary a résolu ce problème pour le cas de $\xi$ rationnel, en obtenant le résultat remarquable suivant. Soit $\xi = \frac{p}{q}$, fraction irréductible; la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit U est que $p = 1$; dans tous les autres cas, l'ensemble est M.

Ainsi a été mis en évidence le rôle essentiel de la nature arithmétique de $\xi$.

## 6. Le cas de $\xi$ irrationnel. Les nombres de la classe C.

Soit $\theta$ un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que $\theta$ lui-même) ont des modules strictement inférieurs à l'unité. On peut évidemment supposer $\theta > 0$. Et l'on a nécessairement $\theta > 1$. Nous désignerons par C la classe de tous les nombres $\theta$. Soit $\xi = 1/\theta$. Si $\theta > 2$, ce que nous supposerons, il existe un ensemble cantorien E à rapport constant $\xi$. Le premier résultat obtenu dans la classification des ensembles cantoriens à rapport constant $\xi$ irrationnel est le suivant. Pour que E soit un ensemble U, il est nécessaire que l'on ait $\xi = 1/\theta$, où $\theta$ est un nombre de la classe C. En d'autres termes, si $1/\xi$ n'appartient pas à C (par exemple si $\xi$ est transcendant), l'ensemble est un ensemble M.

La démonstration se fait en considérant la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble E à rapport constant $\xi$ et en démontrant que son coefficient de Fourier-Stieltjes

$$c_n = (2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{k-1} (1 - \xi) \tag{2}$$

tend vers zéro pour $n \to \infty$ dès que $1/\xi$ n'appartient pas à la classe C.

Cette démonstration s'appuie à son tour sur un théorème de Pisot d'après lequel les nombres $\theta$ de la classe C sont caractérisés par l'existence d'un nombre réel $\lambda$ tel que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

soit convergente. Cette propriété est, en soi, un résultat important de la théorie des approximations diophantiennes. Elle caractérise les nombres $\theta$ de C par l'existence d'un $\lambda$ tel que $\lambda\theta^n$, réduit modulo 1, tende vers zéro assez vite pour que la somme des carrés de $\{\lambda\theta^n\}$ converge, ($\{z\}$ désignant la différence en valeur absolue entre $z$ et l'entier le plus voisin).