5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

la série qui converge vers zéro hors de P est une série de Fourier-Stieltjes.

Donc, en particulier, pour montrer que P est un ensemble M, il suffit de construire une fonction continue non décroissante, constante dans chaque intervalle contigu à P (mais non partout) et dont les coefficients de Fourier-Stieltjes tendent vers zéro — c'est la méthode employée par Menchoff.

Il est plus compliqué de démontrer, en se servant des mêmes idées, qu'un ensemble parfait P est un ensemble U. Il faut évidemment montrer qu'il n'existe pas de fonction à variation bornée constante dans les intervalles contigus à P et à coefficients de Fourier-Stieltjes tendant vers zéro. Mais cela ne suffit pas: il faut encore montrer qu'il n'existe aucune fonction (à variation bornée ou non) constante dans chaque intervalle contigu à P et dont les coefficients de Fourier soient $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

En fait, on ne s'est jamais, à notre connaissance, servi de cette méthode pour montrer qu'un ensemble E est un ensemble U. On l'a toujours fait en montrant que E appartient à une catégorie d'ensembles (par exemple H) qui sont connus pour être des ensembles d'unicité.

5. Les résultats de Nina Bary sur les ensembles cantoriens a rapport constant rationnel.

Les ensembles de Cantor à rapport constant ξ sont, quand ξ est l'inverse d'un entier (comme pour l'ensemble ternaire classique de Cantor) du type H et donc, d'après le théorème de Rajchman, des ensembles U. Il était naturel de se demander si ces ensembles peuvent être des ensembles M pour certaines valeurs de ξ et dans l'affirmative de déterminer les valeurs de ξ pour lesquelles l'ensemble est un ensemble d'unicité ou de multiplicité.

Nina Bary a résolu ce problème pour le cas de ξ rationnel, en obtenant le résultat remarquable suivant. Soit $\xi = \frac{p}{q}$, fraction irréductible; la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit U est que $p = 1$; dans tous les autres cas, l'ensemble est M.

Ainsi a été mis en évidence le rôle essentiel de la nature arithmétique de ξ.

6. Le cas de ξ irrationnel. Les nombres de la classe C.

Soit θ un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que θ lui-même) ont des modules strictement inférieurs à l'unité. On peut évidemment supposer $\theta > 0$. Et l'on a nécessairement $\theta > 1$. Nous désignerons par C la classe de tous les nombres θ. Soit $\xi = 1/\theta$. Si $\theta > 2$, ce que nous supposerons, il existe un ensemble cantorien E à rapport constant ξ. Le premier résultat obtenu dans la classification des ensembles cantoriens à rapport constant ξ irrationnel est le suivant. Pour que E soit un ensemble U, il est nécessaire que l'on ait $\xi = 1/\theta$, où θ est un nombre de la classe C. En d'autres termes, si $1/\xi$ n'appartient pas à C (par exemple si ξ est transcendant), l'ensemble est un ensemble M.

La démonstration se fait en considérant la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble E à rapport constant ξ et en démontrant que son coefficient de Fourier-Stieltjes

$$c_n = (2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{k-1} (1 - \xi) \tag{2}$$

tend vers zéro pour $n \to \infty$ dès que $1/\xi$ n'appartient pas à la classe C.

Cette démonstration s'appuie à son tour sur un théorème de Pisot d'après lequel les nombres θ de la classe C sont caractérisés par l'existence d'un nombre réel λ tel que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

soit convergente. Cette propriété est, en soi, un résultat important de la théorie des approximations diophantiennes. Elle caractérise les nombres θ de C par l'existence d'un λ tel que $\lambda\theta^n$, réduit modulo 1, tende vers zéro assez vite pour que la somme des carrés de $\{\lambda\theta^n\}$ converge, ($\{z\}$ désignant la différence en valeur absolue entre z et l'entier le plus voisin).