

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $x^n + 1$
Autor: Sierpiski, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34636>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dies waren einige Proben, an denen gezeigt werden sollte, wie sich der zu Anfang erwähnte Gedanke, komplexe Zahlen im Zusammenhang mit dem Einheitskreis zu verwenden, nutzbringend verwenden läßt. Es gibt sehr viele weitere einfache Anwendungen; da es nur um die Fixierung der Gedanken geht, soll nicht weiter auf sie eingegangen werden.

SUR LES NOMBRES PREMIERS DE LA FORME $n^n + 1$

par W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

(Reçu le 11 décembre 1957.)

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Parmi les nombres ayant au plus trois cent milles chiffres (en système décimal) il n'y en a que trois, 2, 5 et 257 qui sont des nombres premiers de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel.

DÉMONSTRATION. — Le nombre $1^1 + 1 = 2$ est premier. Soit maintenant n un nombre naturel > 1 et supposons que le nombre $n^n + 1$ est premier. Si n avait un diviseur premier impair p , on aurait $n = kp$, où k est un nombre naturel et le nombre $n^n + 1 = (n^k)^p + 1$ serait divisible par le nombre naturel $n^k + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $k < kp = n$), ce qui est impossible. Donc n n'a aucun diviseur premier impair et, comme $n > 1$, on a $n = 2^s$, où s est un nombre naturel. Si s avait un diviseur premier q impair, on aurait $s = kq$, où k est un nombre naturel, et le nombre $n^n + 1 = 2^{sn} + 1 = (2^{kn})^q + 1$ serait divisible par le nombre naturel $2^{kn} + 1$ qui est > 1 et $< n^n + 1$ (puisque $2^{kn} < 2^{knq} = n^n$), ce qui est impossible. Le nombre s n'a donc aucun diviseur premier impair, donc $s = 2^m$, où m est un entier ≥ 0 .

Nous avons ainsi démontré que si n est un nombre naturel > 1 et si le nombre $n^n + 1$ est premier, on a $n = 2^{2^m}$, où m est un entier ≥ 0 , donc $n^n + 1 = 2^{2^{m+2^m}} + 1 = F_{m+2^m}$, où F_k est le k -ième nombre de Fermat, $F_k = 2^{2^k} + 1$. Donc, les seuls nombres $n^n + 1$ premiers, où n est un nombre naturel > 1 , sont les nombres premiers de la forme F_{m+2^m} , où m est un entier ≥ 0 .

Pour $m = 0$, on obtient le nombre premier $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, pour $m = 1$ — le nombre premier $F_3 = 257 = 4^4 + 1$. Pour $m = 2$, le nombre F_6 est composé, divisible par le nombre premier 274177 (voir, par exemple, M. KRAITCHIK, *Introduction à la Théorie des Nombres*, Paris, 1952, p. 4).

Pour $m = 3$, le nombre F_{11} est composé, divisible par le nombre premier $39 \cdot 2^{13} + 1$ (voir *ibidem*). Donc, s'il existe un nombre premier de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel > 4 , ce nombre est $\geq F_{m+2^m}$ où $m = 4$, donc est $\geq F_{20}$. Or, comme $2^{10} > 10^3$, on a $2^{20} > 10^6$, d'où $2^{2^{20}} > 2^{10^6} = (2^{10})^{10^5} > 10^{3 \cdot 10^5}$ et on en conclut que le nombre $F_{20} = 2^{2^{20}} + 1$ a plus que $3 \cdot 10^5$ chiffres.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Vu notre théorème, on pourrait exprimer l'hypothèse H qu'il existe seulement trois nombres premiers de la forme $n^n + 1$, où n est un nombre naturel, notamment seulement les nombres 2, 5 et 257. Il est à remarquer que de cette hypothèse H il résulte l'existence d'une infinité de nombres de Fermat F_n composés.

Tels seraient, d'après H, tous les nombres $F_{m+2^m} = (2^{2^m})^{2^{2^m}} + 1$, où $m = 2, 3, 4, \dots$