

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ZUR ELEMENTAREN DREIECKSGEOMETRIE IN DER KOMPLEXEN EBENE
Autor: Hofmann, Jos. E.
Kapitel: 2. Von der Bogengleichheit.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34635>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Soll das orthogonal verbundene Quadrupel aus den Längen der Pfeile bestimmt werden, dann entsteht eine kubische Gleichung für den Durchmesser des Kreises, in den der Streckenzug eingepaßt werden kann ⁴⁾. Diese Gleichung hat drei reelle Lösungen; die Anordnung der (in ihrer Reihenfolge vertauschbaren) Pfeile in diesen Kreisen wird genau durch die drei Arten der Abb. 4 veranschaulicht ⁵⁾.

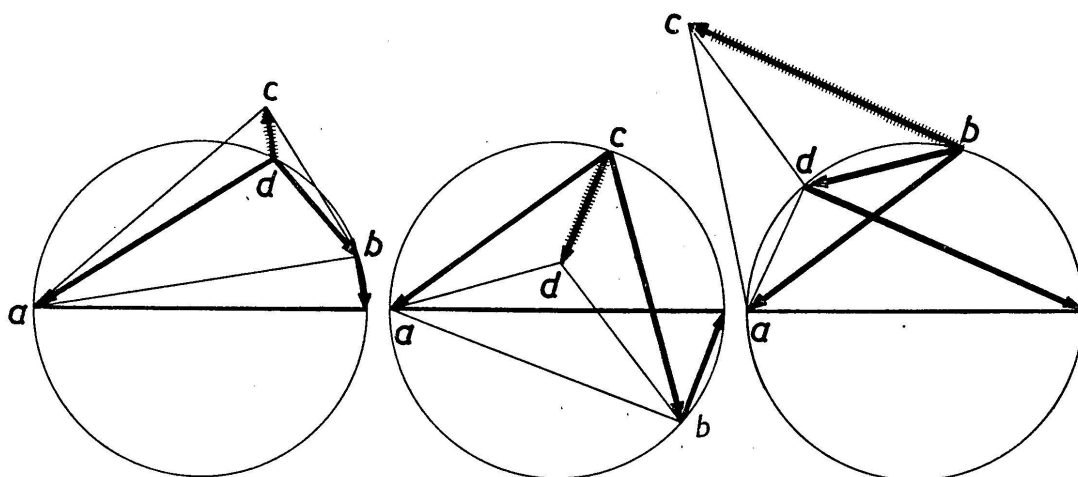


Abb. 4.
Der Holzsche Satz.

2. VON DER BOGENGLEICHHEIT.

(2, 1) Sind (a, b) und (c, d) zwei Paralleelsehnen im Einheitskreis (Abb. 5), dann sind die Kreisbögen zwischen den Parallelen gleich groß. Prägen wir ihnen den positiven Gegenuhrzeigersinn

⁴⁾ Das Einpassungsproblem wird heute allgemein nach I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, Kap. XIII, 8./10. Vorlesung von 1675/76, ed. W. WHISTON, Cambridge 1707, 97/113 genannt, so z.B. bei H. DÖRRIE, *Mathematische Miniaturen*, Breslau 1943, 31. Es stammt jedoch nicht von NEWTON, sondern von Fr. van SCHOOTEN, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus...*, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden 1646, 102/08 und 111/17, in verbesserter Form wiederabgedruckt in R. DESCARTES, *Geometrie* ed. Fr. van Schooten, I, Amsterdam 1659, 354/59 und 361/67. Dies wird die Vorlage für Newton gewesen sein, der diese Ausgabe der *Geometria* besaß.

Setzen wir z.B. $|b, c| = u$, $|c, a| = v$, $|a, b| = w$, dann heißt die (bereits bei Schooten auftretende) kubische Gleichung

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)x + 2uvw.$$

⁵⁾ Diese drei Fälle treten auch bei SCHOOTEN ⁴⁾ und NEWTON ⁴⁾ auf. Auch die elegante kinematische Lösung bei BIEBERBACH ³⁾, 115/16 vermittelt eines transparenten Blattes und des Stechzirkels erweist sich bei genauerem Zusehen als Variante der Lösung von SCHOOTEN. Dieser arbeitet im Anschluß an Fr. VIÈTE, *Supplementum geometriae*, Tours 1593, Wiederdruck in den *Opera*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, vermittelt einer Einschiebung, die mit der Winkeldreiteilung zusammenhängt.

auf, dann ist gemäß den in der Abbildung gewählten Bezeichnungen $\frac{c}{b} = \frac{a}{d}$; also

$$ab = cd.$$

Fällen wir z.B. das Lot aus c auf (a, b) , dann trifft es in $-d = -\frac{ab}{c}$ auf dem Kreis ein.

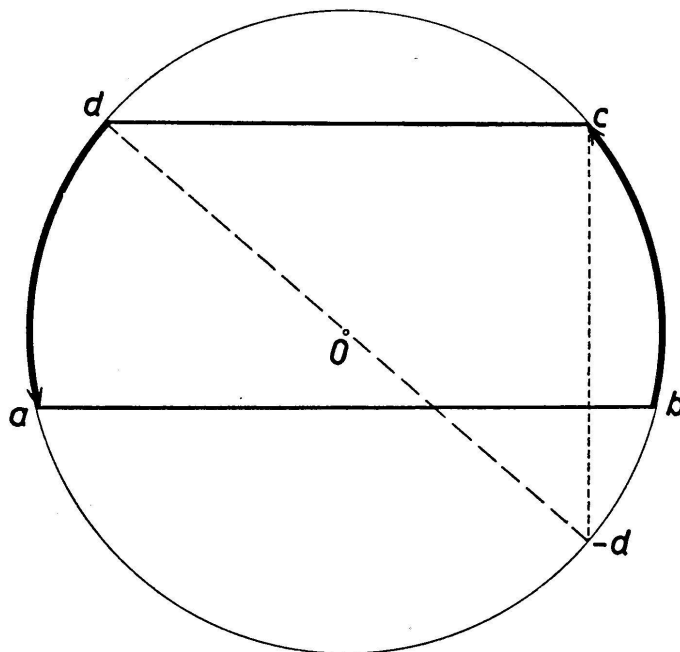


Abb. 5.
Bogengleichheit.

(2, 2) Haben wir nunmehr die Punkte a, b, c auf dem Umfang des Einheitskreises (Abb. 6), dann wird der Kreis von den Höhen des Dreiecks (a, b, c) bzw. in den Punkten $p = -\frac{bc}{a}$, $q = -\frac{ca}{b}$, $r = -\frac{ab}{c}$ geschnitten. Nun ist aber z.B. $\frac{c}{p} = -\frac{a}{b} = \frac{q}{c}$. Daraus folgt, daß der Pfeil (r, c) die innere Halbierende des Winkels (p, r, q) ist.

Also sind die Höhen des Sehnendreiecks (a, b, c) , die inneren Winkelhalbierenden des zugeordneten Gegendreiecks (p, q, r) und der Höhenschnittpunkt des Ausgangsdreiecks ist zugleich der Inkreismittelpunkt des neuen ⁶⁾.

⁶⁾ Vgl. Ph. NAUDÉ in den *Miscellanea Berolinensia* 5, 1737, 17 bzw. FEUERBACH ¹⁾, § 24.

Weiterhin ist ω (vgl. 1, 2) Mittelpunkt zwischen d und r ; also $\omega = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right)$ usw. und $d - \omega = \frac{(a + c)(b + d)}{2c}$ usw.

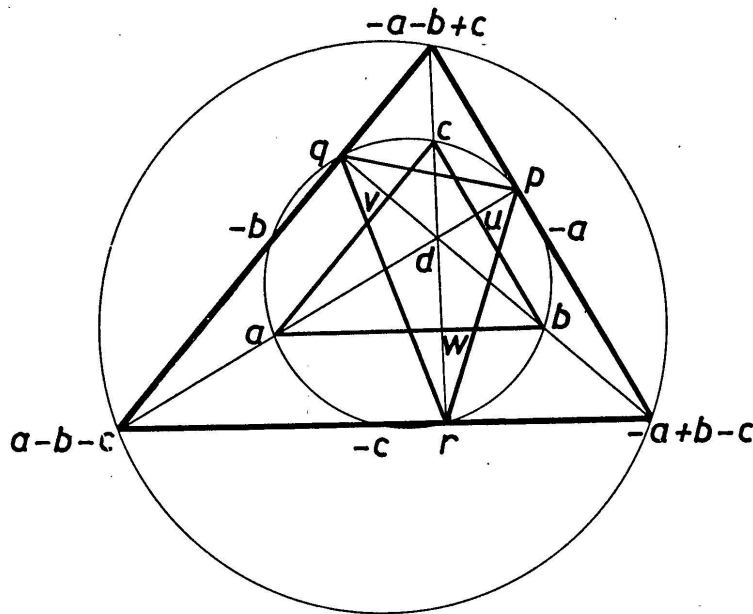


Abb. 6.

Dreieck und Gegendreieck.

(2, 3) Jetzt ergänzen wir noch die Gegenpunkte $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$ zu a, b, c bez. O. Dann ist z.B. die Gerade $(-c, r)$ die äußere Halbierende des Winkels (p, r, q) . Fügen wir auch die anderen äußeren Winkelhalbierenden $(-a, p)$, $(-b, q)$ des Dreiecks (p, q, r) hinzu, dann entsteht ein Dreieck, das zum Dreieck (a, b, c) aus d ähnlich und im Maßstab 2:1 vergrößert ist. Jetzt tritt z.B. an Stelle von c die Ecke $(-a - b + c)$; denn c ist Mittelpunkt zwischen $(-a - b + c)$ und d . Der Ausgangskreis ist der FEUERBACH-Kreis dieses vergrößerten Dreiecks, dessen Umkreis den Halbmesser 2 hat. Damit sind wir in etwas anderer Form zu den früheren Ergebnissen zurückgekommen.

Wir können die Ergebnisse auch bruchfrei ausdrücken, indem wir nämlich p durch p^2 , q durch q^2 und r durch r^2 ersetzen. Dann müssen wir a durch $-qr$, b durch $-rp$ und c durch $-pq$ ersetzen und erhalten den Inkreismittelpunkt in der Form $-(qr + rp + pq)$, die Ankreismittelpunkte in der Form $(-qr + rp + pq)$, $(qr - rp + pq)$, $(qr + rp - pq)$.