

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT
Autor: Quan, Pham Mau
Kapitel: 7. Un problème du calcul des variations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34626>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4 . Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}, \theta$ ainsi que les coefficients $\kappa, c, l, \varepsilon, \mu, \sigma$.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\bar{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\bar{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\bar{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\bar{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\bar{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (u_0)^2.$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\bar{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable V_{n+1} , soit $W_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de V_{n+1} . Si l'on adopte sur V_{n+1} des coordonnées locales (x^α) chaque élément de $W_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées (x^α) du point x correspondant de V_{n+1} et des $n + 1$ composantes $(\dot{x}^\alpha)$ du vecteur $\dot{x}$ dans le repère naturel en x associé aux (x^α) . Une structure de *variété finslérienne* sur V_{n+1} est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $W_{2(n+1)}$ telle que pour x fixe, $\mathcal{L}(x, \lambda \dot{x}) = \lambda \mathcal{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$.

Considérons une variété différentiable V_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de générateur $\vec{\zeta}$, ne laissant invariant aucun point de V_{n+1} ($\vec{\zeta} \neq 0$). Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle R , et soit V_n la variété quotient de V_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. Nous identifierons V_n à l'espace dont les points z sont les trajectoires d'isométries. Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i) , ($i = 1, 2, \dots, n$), la fonction $\mathcal{L}$ est localement indépendante de la variable x^0 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, x^0).$$

Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient V_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions $L(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de V_{n+1} extrémales de l'intégrale

$$(7.1) \quad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, \dot{x}) du \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{du} \right)$$

correspondent par projection sur V_n des extrémales de

$$(7.2) \quad \int_{z_0}^{z_1} L(z, \dot{z}) du \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{du} \right).$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \dots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \dots, n$ et nous supposons

$$\partial_{00} \mathcal{L} \neq 0, \quad \partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}.$$

Donnons-nous une extrémale de (7. 1) par une représentation paramétrique $x^{\alpha}(u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrémales de (7. 1)

$$(7.3) \quad \frac{dx^{\alpha}}{du} = \dot{x}^{\alpha}$$

où $\dot{x}^{\alpha}$ satisfait à

$$(7.4) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$(7.5) \quad \omega = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} dx^{\alpha} = \partial_k \mathcal{L} dx^k + \partial_0 \mathcal{L} dx^0.$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$(7.6) \quad \partial_0 \mathcal{L} = h.$$

Comme $\partial_{00} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (7.6) par rapport à $\dot{x}^0$; on obtient l'équation équivalente

$$(7.7) \quad \dot{x}^0 = \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)$$

où φ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^l$ et dépendant effectivement de h .

Considérons la famille des extrémales (E_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h . Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur $h dx^0$ et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrémales admet l'invariant intégral relatif

$$(7.8) \quad \partial_k \mathcal{L} dx^k.$$

Or d'après l'homogénéité de $\mathcal{L}$, on a

$$\dot{x}^k \partial_k \mathcal{L} + \dot{x}^0 \partial_0 \mathcal{L} = \mathcal{L}.$$

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $x^k \partial_k \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables $x^k, \dot{x}^l, h$

$$(7,9) \quad L(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)$$

et l'on a

$$\partial_k L = \partial_k \mathcal{L} + \partial_0 \mathcal{L} \partial_k \varphi - h \partial_k \varphi = \partial_k \mathcal{L}.$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_k L dx^k.$$

Autrement dit, elles sont extrémales de l'intégrale

$$(7.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} L(x^k, \dot{x}^l, h) du$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $L(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible ³⁾.

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$.

Nous supposons que la variété $\bar{V}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$(8.1) \quad \mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrémales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

³⁾ Voir A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.