Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE

Autor: Salem, Raphaël

Kapitel: 7. Le cas de irrationnel (suite). Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34640

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

7. Le cas de ξ irrationnel *(suite)*. Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Le résultat ci-dessus ne résoud pas entièrement le problème de la classification des ensembles cantoriens $E(\xi)$ à rapport constant ξ suivant les valeurs de ξ. Il laisse en effet intact le problème de savoir si la condition $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que $E(\xi)$ soit un ensemble U. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de montrer — ce qui est facile — que le coefficient de Fourier-Stieltjes c_n de (2) ne tend pas vers zéro quand $\xi = \frac{1}{\theta}$, $\theta \in C$ pour en conclure que $E(\xi)$ est un ensemble U.

La solution du problème a été rendue possible par la découverte, par Piatecki-Shapiro, d'un nouveau type d'ensemble d'unicité, les ensembles du type $H^{(n)}$ qui ne se réduisent pas aux ensembles H ou à leur union. Considérons le cas de $n = 2$, qui est typique.

Nous dirons qu'une suite de vecteurs V de coordonnées entières p_k, q_k dans l'espace euclidien R^2 est normale si quels que soient les entiers fixes a, b l'expression $|ap_k + bq_k|$ croît indéfiniment avec k.

Ceci dit, considérons un ensemble E contenu pour fixer les idées dans (0, 1). Soit $x \in E$ et considérons le point P de coordonnées $p_k x$, $q_k x$ réduites modulo 1, c'est-à-dire prises sur le tore unité dans R^2. Si quel que soit $x \in E$, et quel que soit k le point P_k n'appartient jamais à un certain ensemble G ouvert du tore, on dit que E est du type $H^{(2)}$. L'analogie avec les ensembles du type H est évidente, et la généralisation à l'espace euclidien R^n est immédiate, fournissant des ensembles du type $H^{(n)}$.

Grâce au théorème de Piatecki-Shapiro, d'après lequel tout ensemble du type $H^{(n)}$ est un ensemble U, on peut démontrer que l'ensemble cantorien $E(\xi)$ à rapport constant ξ où $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est un ensemble U. On démontre, en effet, que si θ est de degré n, $E(\xi)$ est de type $H^{(n)}$ précisément. Le vecteur « normal » V_k qu'on considère ici a pour coordonnées les entiers

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \cdots a_{k+n}$$

où $a_s = \theta^s + \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s \to 0$ et le fait qu'il est normal se démontre en remarquant que quels que soient les entiers $c_1 \dots c_n$ on a toujours

$$c_1 + c_2\,\theta + \cdots + c_n\,\theta^{n-1} \neq 0$$

puisque θ est de degré n. C'est ainsi que s'établit la relation entre le type de l'ensemble et le degré de l'entier algérbique θ.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la théorie générale, consulter:

A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lewow, 1953, mais plus spécialement la nouvelle édition de cet ouvrage, qui est sur le point de paraître en Angleterre, Cambridge University Press.

Sur les ensembles U et M, on consultera:

N. Bari, *The uniqueness problem*, Translation No. 52 of the American Mathematical Society (translated from *Uspechi Mat. Nauk* (1949)).

Mémoires originaux.

D. E. Menchoff, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, vol. 163 (1916), pp. 433-436.

A. Rajchman, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Fundamenta Mathematica*, 3 (1922), pp. 286-302.

N. K. Bari, Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème de l'unicité du développement trigonométrique. *Rec. Math. de Moscou N. S.*, 2 (44) (1937), pp. 99-724.

R. Salem, Sets of uniqueness and sets of multiplicity. *Trans. Am. Math. Soc.*, 54 (1943), pp. 218-228 et 56 (1944), pp. 32-49.

—— Rectification to the papers « Sets of uniqueness and sets of multiplicity ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 63 (1948), pp. 595-598.

Piatecki-Shapiro, *Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1953), pp. 167-170 et *Ucenye Zapiski Mosc.* (1954).

R. Salem et A. Zygmund, Sur un théorème de Piatecki-Shapiro. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2040-2042.

—— et A. Zygmund, Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2281-2283.

Sur les nombres de la classe C, on consultera:

C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Annali di Pisa*, 7 (1938), pp. 205-248.

R. Salem, A remarkable class of algebraic integers. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944), pp. 103-108.

J. W. S. Cassels, Diophantine Approximation. *Cambridge tracts No. 45* (Camb. Univ. Press, 1957).