

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Si enfin $f(x)$ jouit de la propriété E et $g(x)$ est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(N+1)g(x)}{f(n)g(\Psi(x))} \leq \frac{f(N+1)g(n)}{f(n)g(N+1)} \leq 1.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant $\Psi(x)$ une fonction conjuguée satisfaisant à la condition $\Psi(x) \geq x + 1$. En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré $\Phi(x)$ par $\Psi'(x)$ on voit que si la convergence de la série $\Sigma g(\nu)$ se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$ il en est de même pour la série $\Sigma f(\nu)$. De même, si la divergence de la série $\Sigma f(\nu)$ se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$, il en est de même pour $\Sigma g(\nu)$.

Posons en particulier $\Psi(x) = e^x$. Alors les fonctions

$$L_n(x) \lg_n^{1+s} x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critère B d'Ermakoff (avec $\Psi(x) = e^x$) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les a_ν entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte :

Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour $\Psi(x) = e^x$ s'il s'agit d'une série Σa_ν à termes non croissants ou bien si l'on a $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \rightarrow 1$.

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée $\Psi(x)$. A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.¹

¹ E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient $\frac{f(\Psi(x))\Psi'(x)}{f(x)}$ tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi ∞ .

Désignons les itérées de la fonction conjuguée $\Psi(x)$ par $\Psi_n(x)$, de sorte qu'on ait

$$\Psi_1(x) = \Psi(x), \quad \dots, \quad \Psi_{n+1}(x) = \Psi(\Psi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors la *première assertion* d'Ermakof peut être énoncée comme suit:

Les fonctions conjuguées $\Psi_n(x)$ et $\Psi(x)$ donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.

Ce théorème est inexact. Au contraire, les fonctions itérées $\Psi_n(x)$ ($n > 1$) donnent une sensibilité en général plus grande que $\Psi(x)$. En effet, on a évidemment

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \Psi'_n(x) = \frac{f(\Psi(\Psi_{n-1}(x)))}{f(\Psi_{n-1}(x))} \Psi'(\Psi_{n-1}(x)) \cdot \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \Psi'_{n-1}(x). \quad (\text{VIII, 1})$$

Il en résulte que si l'on a

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) = q < 1$$

on aura

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leq q \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_{n-1}(x),$$

donc par récurrence

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leq q^n.$$

De même, si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) \geq 1,$$

il résulte de (VIII, 1) qu'on aura aussi à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \geq 1.$$

Nous allons maintenant donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non croissante à partir d'un x et telle que le critère de convergence B d'Ermakof n'est pas applicable à la série $\Sigma f(v)$ pour $\Psi(x) = x^2$, mais devient applicable pour $\Psi_2(x) = x^4$.

A cet effet, formons une suite infinie x_1, x_2, x_3, \dots en posant

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4^4, \quad \dots, \quad x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Posons $f(x_1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2} \lg x_\nu) x} \quad (x_\nu < x < x_\nu^4),$$

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x} \quad (x_\nu^4 \leq x \leq x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4).$$

Ces relations permettent évidemment de définir la valeur de $f(x)$ par voie de récurrence pour $x \geq 3$. Il résulte de ces formules que la fonction $f(x)$ ainsi définie est continue, positive et non croissante dans chacun des intervalles $(x_\nu, x_\nu^4), < x_\nu^4, (1 + x_\nu)^4 >$, tandis qu'en passant par le point $x = x_\nu^4$ sa valeur se trouve divisée par 8^ν et en passant par le point x_ν , par $8^{\nu^2} x_\nu \lg x_\nu$.

Considérons le rapport $\frac{f(x^2) 2x}{f(x)}$ pour $x_\nu < x < 1 + x_\nu$; x^2 étant contenu dans l'intervalle (x_ν, x_ν^4) , il résulte évidemment

$$\frac{f(x^2) 2x}{f(x)} = \frac{x \cdot 2x}{x^2} = 2.$$

On a donc, en posant $\Psi(x) \equiv x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 2.$$

Pour $\Psi_2(x) = x^4$, on obtient

$$\frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = \frac{f(x^4) 4x^3}{f(x)}.$$

Or, en premier lieu, si $x_\nu \leq x \leq 1 + x_\nu$, x^4 est située dans l'intervalle $< x_\nu^4, x_{\nu+1} >$. On aura donc

$$f(x^4) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4x^3}{f(x)} \leq \frac{x \cdot 4x^3}{8^\nu x^4} = \frac{4}{8^\nu} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty, \quad x_\nu \leq x \leq 1 + x_\nu).$$

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{(8^{(\nu+1)^2} \lg x_{\nu+1}) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} = \frac{4 f(x_{\nu+1})}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) x f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geq \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \leq \frac{f(x_{\nu+1}) (8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) \cdot 4}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1}) \lg x_\nu}{(2 \cdot 8^\nu \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \rightarrow \infty$

$$\lg x_{\nu+1} \sim 4 \lg x_\nu, \quad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu),$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty, \quad 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}).$$

On a ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

IX. Les fonctions conjuguées auxquelles $x + 1$ est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence. »