

## VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

que pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec  $\Psi(x) = x^k$  ( $k > 1$ ).

**VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.**

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \leq \frac{c_{\nu+1}}{c_{\nu}} \quad (a_{\nu}, c_{\nu} > 0 ; \nu = 1, 2, \dots),$$

la convergence de  $\Sigma c_{\nu}$  entraîne celle de  $\Sigma a_{\nu}$ , donc la divergence de  $\Sigma a_{\nu}$  entraîne la divergence de  $\Sigma c_{\nu}$ . On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente  $\Sigma c_{\nu}$ , ou la série divergente  $\Sigma a_{\nu}$ .

Or si les  $a_{\nu}$  et les  $c_{\nu}$  convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

*Si la convergence de la série de comparaison  $\Sigma c_{\nu}$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée  $\Psi(x)$ , le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de  $\Sigma a_{\nu}$ . Si la divergence de la série  $\Sigma a_{\nu}$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de  $\Sigma c_{\nu}$ .*

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction  $f(x)$  non nulle à partir d'un  $x$ , qu'elle possède la propriété E si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \tag{VII, 1}$$

uniformément par rapport à  $\theta$  pour  $|\theta| \leq 1$ .

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

**Lemme.** — *Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$ , dont l'une au moins jouit de la propriété E, tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété E. Soient  $\Psi(x)$ ,  $\Phi(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$  avec  $\Psi(x) \geq x + 1$ . Alors si l'on a pour tout entier  $\nu \geq n_0$ :*

$$\frac{f(\nu + 1)}{f(\nu)} \leq \frac{g(\nu + 1)}{g(\nu)} \quad (\nu \geq n_0), \quad (\text{VII, 2})$$

on a,  $x$  tendant vers l'infini,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Phi(x)}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(\Psi(x)) \Phi(x)}{g(x)}, \quad (\text{VII, 3})$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Phi(x)}{f(x)} \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(\Psi(x)) \Phi(x)}{g(x)}. \quad (\text{VII, 4})$$

*Démonstration.* — Observons d'abord que si l'on a pour deux fonctions  $A(x)$  et  $B(x)$ , positives pour  $x \geq x_0$ :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{B(x)} \leq 1,$$

il en résulte

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} A(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} B(x),$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} A(x) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} B(x).$$

Donc les relations (VII, 3) et (VII, 4) résultent de la relation

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) g(x)}{g(\Psi(x)) f(x)} \leq 1, \quad (\text{VII, 5})$$

que nous allons démontrer. Posons  $[x] = n$ ,  $[\Psi(x)] = N \geq n + 1$  où le symbole  $[x]$  désigne le plus grand entier contenu dans  $x$ .

Si  $f(x)$  et  $g(x)$  jouissent les deux de la propriété E, l'expression

$$\frac{f(\Psi(x)) g(x)}{f(x) g(\Psi(x))} \quad (\text{VII, 6})$$

est équivalente avec  $\frac{f(N) g(n)}{g(N) f(n)}$  et cette dernière expression est  $\leq 1$ , en vertu de (VII, 2).

Si  $f(x)$  est non croissante et  $g(x)$  jouit de la propriété E, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\Psi(x)) g(n + 1)}{f(x) g(N)} \leq \frac{f(N) g(n + 1)}{f(n + 1) g(N)} \leq 1,$$

en vertu de (VII, 2).

Si enfin  $f(x)$  jouit de la propriété E et  $g(x)$  est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(N+1)g(x)}{f(n)g(\Psi(x))} \leq \frac{f(N+1)g(n)}{f(n)g(N+1)} \leq 1.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant  $\Psi(x)$  une fonction conjuguée satisfaisant à la condition  $\Psi(x) \geq x + 1$ . En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré  $\Phi(x)$  par  $\Psi'(x)$  on voit que si la convergence de la série  $\Sigma g(\nu)$  se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à  $\Psi(x)$  il en est de même pour la série  $\Sigma f(\nu)$ . De même, si la divergence de la série  $\Sigma f(\nu)$  se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à  $\Psi(x)$ , il en est de même pour  $\Sigma g(\nu)$ .

Posons en particulier  $\Psi(x) = e^x$ . Alors les fonctions

$$L_n(x) \lg_n^{1+s} x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critère B d'Ermakoff (avec  $\Psi(x) = e^x$ ) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les  $a_\nu$  entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte :

*Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour  $\Psi(x) = e^x$  s'il s'agit d'une série  $\Sigma a_\nu$  à termes non croissants ou bien si l'on a  $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \rightarrow 1$ .*

### VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée  $\Psi(x)$ . A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient  $\frac{f(\Psi(x))\Psi'(x)}{f(x)}$  tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi  $\infty$ .