VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

que pour $n = 0$ et $n = 1$ la question de la convergence (ou divergence) des séries de Morgan-Bertrand est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = x^k \, (k > 1)$.

VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \quad (a_\nu \, , \, c_\nu > 0 \; ; \quad \nu = 1, 2, \ldots) \, ,$$

la convergence de $\Sigma \, c_\nu$ entraîne celle de $\Sigma \, a_\nu$, donc la divergence de $\Sigma \, a_\nu$ entraîne la divergence de $\Sigma \, c_\nu$. On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente Σc_ν ou la série divergente $\Sigma \, a_\nu$.

Or si les a_ν et les c_ν convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

Si la convergence de la série de comparaison Σc_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof avec la fonction conjuguée* $\Psi(\mathrm{x})$, *le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de* Σa_ν. *Si la divergence de la série* Σa_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de* Σc_ν.

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction $f(x)$ non nulle à partir d'un x, qu'elle possède *la propriété* E *si l'on a*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \qquad \text{(VII, 1)}$$

uniformément par rapport à θ pour $|\theta| \leqq 1$.

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. — *Soient* $\mathrm{f(x)}$ *et* $\mathrm{g(x)}$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$, *dont l'une au moins jouit de la propriété* E, *tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété* E. *Soient* $\Psi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x})$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$ *avec* $\Psi(\mathrm{x}) \geqq \mathrm{x} + 1$. *Alors si l'on a pour tout entier* $\nu \geqq \mathrm{n}_0$:

$$\frac{f(\nu+1)}{f(\nu)} \leqq \frac{g(\nu+1)}{g(\nu)} \qquad (\nu \geqq n_0), \tag{VII, 2}$$

on a, x *tendant vers l'infini*,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Phi(x)}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{g(\Psi(x))\,\Phi(x)}{g(x)}, \tag{VII, 3}$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Phi(x)}{f(x)} \leqq \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{g(\Psi(x))\,\Phi(x)}{g(x)}. \tag{VII, 4}$$

Démonstration. — Observons d'abord que si l'on a pour deux fonctions A (x) et B (x), positives pour $x \geqq x_0$:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)}{B(x)} \leqq 1,$$

il en résulte

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, A(x) \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}}\, B(x),$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\, A(x) \leqq \underline{\lim_{x\to\infty}}\, B(x).$$

Donc les relations (VII, 3) et (VII, 4) résultent de la relation

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,g(x)}{g(\Psi(x))\,f(x)} \leqq 1, \tag{VII, 5}$$

que nous allons démontrer. Posons $[x] = n$, $[\Psi(x)] = N \geqq n+1$ où le symbole $[x]$ désigne le plus grand entier contenu dans x.

Si $f(x)$ et $g(x)$ jouissent les deux de la propriété E, l'expression

$$\frac{f(\Psi(x))\,g(x)}{f(x)\,g(\Psi(x))} \tag{VII, 6}$$

est équivalente avec $\frac{f(N)\,g(n)}{g(N)\,f(n)}$ et cette dernière expression est $\leqq 1$, en vertu de (VII, 2).

Si $f(x)$ est non croissante et $g(x)$ jouit de la propriété E, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\Psi(x))\,g(n+1)}{f(x)\,g(N)} \leqq \frac{f(N)\,g(n+1)}{f(n+1)\,g(N)} \leqq 1,$$

en vertu de (VII, 2).

Si enfin $f(x)$ jouit de la propriété E et $g(x)$ est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(x)}{f(n)\,g(\Psi(x))} \leqq \frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(n)}{f(n)\,g(\mathrm{N}+1)} \leqq 1 \,.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant $\Psi(x)$ une fonction conjuguée satisfaisant à la condition $\Psi(x) \geqq x + 1$. En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré $\Phi(x)$ par $\Psi'(x)$ on voit que si la convergence de la série $\Sigma g(\nu)$ se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$ il en est de même pour la série $\Sigma f(\nu)$. De même, si la divergence de la série $\Sigma f(\nu)$ se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$, il en est de même pour $\Sigma g(\nu)$.

Posons en particulier $\Psi(x) = e^x$. Alors les fonctions

$$\mathrm{L}_n(x)\, lg_n^{1+s}\, x \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critére B d'Ermakoff (avec $\Psi(x) = e^x$) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les a_ν entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte:

Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour $\Psi(x) = e^x$ s'il s'agit d'une série $\Sigma\, a_\nu$ à termes non croissants ou bien si l'on a $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow 1$.

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée $\Psi(x)$. A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.[1]

[1] E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient $\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)}$ tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi ∞.