II

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1951-1954)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

il est lobatchevskien. Mais dans les deux derniers cas, il ne le restera que dans la mesure où sa règle — dont l'arête est une géodésique du plan — lui permet de tracer celles de la sphère ou de la pseudosphère avec une approximation tolérable. Il ne s'en accommodera d'ailleurs que si ses dessins, ses « plans » cotés permettent au travailleur qui les exécute un résultat suffisant; dans la mécanique de précision, par exemple, une tolérance de 1/100 millimètre constitue une erreur mathématique avec un résultat satisfaisant pour le praticien.

Concluons cette première partie de notre note par quelques lignes de Riemann: [1]

« ... On peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites, tant dans le sens des immensurablement grands que dans celui des immensurablement petits. » [2]

* * *

II

7. — Passons à un autre ordre d'idées; nous retrouvons *indéfiniment* en calcul intégral, en mesurant les lignes et les surfaces courbes [3].

---

[1] B. RIEMANN, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, mémoire publié par Dedekind dans le tome XIII des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Goettingen* (1867), traduit par J. Houël, p. 2 du tiré-à-part; ou *Œuvres mathématiques* trad. Laugier, p. 281 (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

[2] On lira avec intérêt la brochure de M. P. BARBARIN: *Pour le centenaire de la Géométrie non euclidienne* (Buenos-Aires, Editions Coni, 1931). On y trouvera les portraits des géomètres (dont deux Belges: J. de Tilly et P. Mansion) qui ont marqué dans l'étude de cette géométrie; du même auteur: *La Géométrie non euclidienne*, 3e édit. (Edit. Scientia, Paris, Gauthier-Villars, 1928).

[3] Une première rédaction de ce § II a paru dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège* (numéro de mars 1950) sous le titre: « Un postulat implicite de la théorie des ensembles ».

Prenons pour exemple l'aire plane OABC, de mesure S, dans le plan d'axes rectangulaires; aire ayant sa base OA $= a$ sur OX, limitée aux ordonnées OC $= l_1$ et AB $= l_2$ et à l'arc CB d'une courbe uniformément continue. Cette aire est l'ensemble, de la puissance du continu, des ordonnées des points de son arc.

La solution classique du problème est la suivante: partageons la base OA en un certain nombre de segments Δx; sur les ordonnées initiale et finale de chaque Δx, construisons un rectangle ayant pour hauteur la plus petite ordonnée y_1 de ce Δx, et un autre dont la hauteur est l'ordonnée la plus grande y_2 du même intervalle. La somme S_1 des premiers de ces rectangles est une partie de l'aire S, la somme S_2 des seconds déborde l'aire S; donc:

$$S_1 < S < S_2, \quad \text{avec} \quad | S_2 - S_1 | = | l_2 - l_1 | \Delta x .$$

Puis répétons ces constructions en augmentant le nombre des intervalles Δx, et ce *indéfiniment*; les sommes S_1 augmentent, les sommes S_2 diminuent, leur différence ayant une limite nulle lorsque Δx décroît indéfiniment; on en conclut que:

$$S = \lim \sum_0^a y_1 \Delta x = \lim \sum_0^a y_2 \Delta x ,$$

ce que l'on écrit $S = \int_0^a y dx$.

On a donc conclu, de la connaissance d'ensembles dénombrables d'ordonnées, à un ensemble d'ordonnées ayant la puissance du continu; à chaque état de S_1 et de S_2, on a pris en considération deux ordonnées fixes l_1 et l_2 et un nombre fini d'ordonnées variables égal à celui des intervalles Δx diminué d'une unité.

Déjà, avant la théorie des ensembles, des esprits rigoureux s'étaient demandé: la conclusion quant à S ne dépend-elle pas du mode de multiplication du nombre des intervalles x ? [1]

Un premier mode est tel qu'à chaque multiplication les ordonnées en cause à la précédente soient conservées; par

[1] Voir par exemple E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, 3e édit., t. I, p. 172; ou S. CARRUS, *Cours de calcul différentiel et intégral*, livre I, p. 270.

exemple ces nombres sont 2, 4, 8, 16, ... 2^n, ... etc. Notre maître P. Mansion, dans son cours oral, dénommait ce mode *concordant avec soi-même.*

Un second mode de multiplication ne conserve aucune des ordonnées en cause à chaque étape; ces nombres seraient, par exemple, les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... formant un ensemble dénombrable, comme on le sait depuis Euclide.

Enfin, un troisième mode de multiplication conserverait une partie seulement des ordonnées de chaque étape.

On peut concevoir des multiplications successives en nombre aussi grand qu'on le veut, *indéfiniment*, toutes mettant en cause un ensemble fini d'ordonnées de l'aire S.

Si l'on opérait de même sur l'ensemble continu des segments d'une droite OX, en en retranchant des segments successifs jusqu'à un point P, il subsisterait une demi-droite PX, c'est-à-dire que la puissance du résidu serait celle de la demi-droite OX tout entière. Généralisant ce fait, la théorie des ensembles démontre que *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*, et que d'*un ensemble ayant la puissance du continu, on peut enlever un ensemble dénombrable d'éléments sans qu'il cesse d'avoir la puissance du continu* [1].

La théorie classique de l'intégrale S fait mieux; d'un ensemble ayant la puissance du continu elle enlève un ensemble dénombrable d'ensembles *finis* d'ordonnées, négligeant un résidu qui conserve la puissance du continu.

Pareil saut n'est assuré de réussir que parce qu'un jugement *intuitif*, fondé sur la vue d'une figure, est admis comme vrai — tel que fut le postulatum d'Euclide. La formule pourrait en être un postulat à introduire dans la théorie des ensembles, postulat formulé comme suit: *soit un ensemble dénombrable d'ensembles finis dénombrables* (E_1) *extraits d'un ensemble* (E) *qui a la puissance du continu; si tous les ensembles* (E_1) *ont une propriété commune, cette propriété appartient aussi à l'ensemble* (E).

Dans notre exemple de l'aire S, la propriété commune est celle qui permet le passage à la limite.

---

[1] Voir E. BOREL, *Eléments de la théorie des ensembles*, pp. 15 et 38 (Paris, Editions Albin Michel, 1949) et la note à la fin du texte.

Le postulat impliquerait que, dans le cas de l'aire S et les cas analogues, tout élément de l'ensemble continu (E) peut être atteint par des sous-ensembles (E_1), quel que soit le mode de prélèvement de ces sous-ensembles.

Dans son livre cité (p. 232-235), E. Borel témoigne d'une certaine inquiétude quant à la validité des raisonnements par lesquels on cherche à mesurer un ensemble qui a la puissance du continu. Le postulat ci-dessus est-il de nature à formuler cette inquiétude, et, peut-être à exprimer un caractère hypothétique ou empirique (aurait peut-être dit Riemann) de l'état actuel de la théorie des ensembles ?

NOTE AU N° 7

Peut-on épuiser l'ensemble dénombrable des nombres entiers en en détachant des sous-ensembles dénombrables ? Son dédoublement en termes pairs et termes impairs, en termes multiples de n et termes non multiples de n semble justifier une réponse affirmative; mais le second sous-ensemble est défini par un caractère négatif. Procédons par un mode positif de formation des sous-ensembles dénombrables.

Formons les sous-ensembles de multiples des nombres premiers (ceux-ci termes d'un ensemble transfini). Nous aurons successivement le sous-ensemble des nombres pairs: 2, 4, 6, 8, ...; celui des multiples de 3 non multiples de 2: 3, 9, 15, 21, ...; celui des multiples de 5 non multiples ni de 2, ni de 3: 25, 35, 55, 65, ...; et ainsi de suite.

Le sous-ensemble des multiples de n premier non multiples des nombres premiers moindres que n commence par n^2; on voit que, quel que soit le nombre premier auquel on est arrivé, le sous-ensemble correspondant reste dénombrable. Pour ce mode de formation des sous-ensembles, la réponse à notre question est donc négative.

Mais cette réponse est positive pour un autre mode de formation de ces sous-ensembles: car l'ensemble des nombres entiers dont l'expression chiffrée est terminée par 1 est transfini dénombrable; de même celui des nombres terminés par 2, 3, ..., 9, 0, et ces dix sous-ensembles épuisent l'ensemble des nombres entiers. Ils seraient douze si l'on écrivait les entiers dans la numération à base 12.

Les considérations précédentes donneraient-elles à un jeune lecteur une première idée de la richesse de la notion d'ensemble transfini dénombrable ? Nous l'espérons. Exprimons les faits exemplaires que nous venons de constater: *un ensemble dénombrable peut n'être pas épuisé par l'extraction d'un ensemble dénombrable de ses sous-ensembles dénombrables*, tandis qu'*il peut l'être par un nombre fini de pareils sous-ensembles.* Enoncé à rapprocher de celui du n° 7 emprunté à E. Borel.