



Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1951-1954)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **03.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de M au point x . On a évidemment $\tau(x) \leq [n/p(x)]$, le dernier nombre étant le plus grand entier $\leq n/p(x)$.

Cela étant, on a le théorème local suivant, qui est dû à M. ALLENDOERFER [1], [4]: Deux variétés isométriques, dont les premiers espaces normaux sont de même dimension, ne diffèrent que par un mouvement (propre ou impropre), si l'une d'entre elles est de type ≥ 3 .

Ce théorème peut être considéré comme un théorème de rigidité locale. Bien entendu, la condition sur le type est très forte.

III

9. — Pour mieux comprendre la géométrie des sous-variétés, il serait utile d'étudier avec plus de détails le cas d'une surface dans E^4 ($n = N = 2$). Nous faisons une autre hypothèse simplificatrice en supposant que M est orientée. Alors l'application tangentielle est $\tilde{T}: M \rightarrow \tilde{G}(2, 2)$. Dans ce cas on peut donner de cette dernière variété une description simple. En effet, soient $p_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 4$, les coordonnées plückeriennes dans $G(2, 2)$. Ce sont les coordonnées homogènes assujetties aux conditions

$$p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 0, \quad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \quad (36)$$

Nous les normalisons par la condition

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta}^2 = 2. \quad (37)$$

Alors les coordonnées $p_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux conditions (36), (37) peuvent être considérées des coordonnées dans $\tilde{G}(2, 2)$, de sorte que les deux plans orientés qui donnent le même plan non orienté aient des coordonnées différant par le signe. Introduisons des coordonnées nouvelles dans $\tilde{G}(2, 2)$ en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34}, & x_2 &= p_{23} + p_{14}, & x_3 &= p_{31} + p_{24}, \\ y_1 &= p_{12} - p_{34}, & y_2 &= p_{23} - p_{14}, & y_3 &= p_{31} - p_{24}. \end{aligned} \quad (38)$$

Avec ces coordonnées x_λ, y_λ , $1 \leq \lambda \leq 3$, les conditions (36) et (37) sont équivalentes aux conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1. \quad (39)$$

Ceci démontre que la variété $\tilde{G}(2, 2)$ est homéomorphe au produit cartésien de deux sphères S_x et S_y ordinaires. Comme $\tilde{G}(2, 2)$ peut être identifiée avec la variété des droites orientées de l'espace elliptique à trois dimensions, ce fait est à la base d'une représentation de Fubini et Study.

Fixons une orientation de S_x et S_y et désignons par M, S_x, S_y les cycles fondamentaux de ces variétés. Les invariants homologiques qu'on peut déduire de l'homomorphisme $\tilde{T}_*$ sont les entiers d_x, d_y définis par la condition $\tilde{T}_*(M) \sim d_x S_x + d_y S_y$, où $\tilde{T}_*$ désigne l'homomorphisme induit par $\tilde{T}$. On peut démontrer que [7], si les orientations de S_x et S_y sont convenablement choisies, on a $d_x = d_y$ et que la valeur commune est la moitié de la caractéristique d'Euler de M . La démonstration s'appuie sur l'étude de l'homéomorphisme σ introduit dans le n° 5, qui est dans notre cas un homéomorphisme de $\tilde{G}(2, 2)$ en elle-même. Son homomorphisme induit sur les cycles a l'effet de fixer un des cycles S_x et S_y et changer le signe de l'autre. Ce fait et le résultat $\bar{W}^2 = 0$ (à coefficients entiers) conduisent facilement à l'égalité $d_x = d_y$.

Pour exprimer les relations de ces résultats avec les invariants différentiels de M dans E^4 , il faut déterminer dans $\tilde{G}(2, 2)$ des formes différentielles extérieures fermées Φ_1, Φ_2 duales aux cycles S_x et S_y , c'est-à-dire telles que

$$\int_{S_\alpha} \Phi_\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad S_1 = S_x, \quad S_2 = S_y, \quad (40)$$

ou δ_α^β est le symbole de Kronecker. Ces formes Φ_1, Φ_2 ne sont pas univoquement déterminées. Cependant on peut démontrer que les choix

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{4\pi} \{ \omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} - \omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24} \}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{4\pi} \{ \omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{24} \}, \end{aligned} \quad (41)$$

satisfont aux conditions (40). On en déduit les formules intégrales suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \chi(M) , \quad (42)$$

$$\int_M (A_{311} A_{412} - A_{312} A_{411} + A_{321} A_{422} - A_{322} A_{421}) dV = 0 .$$

Ces formules ont été données pour la première fois par M. BLASCHKE [3].

L'étude de la variété $\tilde{G}(2, 2)$ conduit aussi à un résultat, dû à M. Wu WEN-TSUN, qui a une conséquence géométrique intéressante. C'est le problème de considérer une courbe paramétrique fermée simple dans $G(2, 2)$ et de voir si elle est la projection d'une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$. Une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$ peut être donnée par $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$, où $x(t) \in S_x$, $y(t) \in S_y$, et $x(0) = \pm x(1)$, $y(0) = \pm y(1)$, en désignant par $-x(1)$, $-y(1)$ respectivement les points antipodes de $x(1)$, $y(1)$ dans S_x , S_y . M. Wu WEN-TSUN a démontré que si, pour deux valeurs différentes quelconques t', t'' de t , $(t', t'') \neq (0, 1)$, les plans correspondants dans $G(2, 2)$ n'ont que le point O en commun, alors la courbe est la projection d'une courbe fermée simple dans $\tilde{G}(2, 2)$. Interprété dans la géométrie elliptique réglée, cela veut dire qu'une surface réglée dans un espace elliptique à trois dimensions est toujours orientable. Elle est donc homéomorphe à un tore ¹.

10. — Je termine cette conférence par quelques questions naturelles:

A) Trouvez des invariants des sous-variétés relatifs à l'homotopie régulière définie dans le n° 1. En particulier, y a-t-il des paires de sous-variétés homéomorphes à deux dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions qui ne sont pas régulièrement homotopes ?

B) Y a-t-il d'autres conditions nécessaires que les conditions déjà connues pour que l'application $T: M \rightarrow G(n, N)$ soit une application tangentielle ?

C) Dans l'espace euclidien à quatre dimensions y a-t-il une surface compacte à courbure gaussienne toujours négative ?

¹ M. H. HOPF m'a fait remarquer que ce théorème est un corollaire d'un théorème plus général, à savoir qu'il n'est pas possible de plonger topologiquement la bouteille de Klein dans l'espace projectif réel à trois dimensions.