

SUR LA VARIATION DES FONCTIONS

Autor(en): **Vessiot, Ernest**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515782>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA VARIATION DES FONCTIONS

PAR

Ernest VESSIOT (Marseille).

On a généralement recours à la formule dite des accroissements finis pour établir, dans l'enseignement, les théorèmes fondamentaux selon lesquels une fonction de variable réelle est constante, croissante, ou décroissante, dans un intervalle, si elle y a, en tout point, une dérivée qui soit, respectivement, nulle, positive ou négative. En voici des démonstrations, directes et élémentaires, qui ne font appel qu'à la notion même de dérivée ¹. Je n'ai pas pu savoir si elles sont nouvelles.

THÉORÈME I. — *Si une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle (x_1, x_2) , y a, en tout point, une dérivée nulle, elle est constante dans cet intervalle.*

DÉMONSTRATION. — Il suffira de prouver que, pour tout intervalle (a, b) contenu dans (x_1, x_2) , on a, quel que soit le nombre positif ε ,

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon(b - a) . \quad (1)$$

Car il en résultera $f(b) - f(a) = 0$, c'est-à-dire $f(b) = f(a)$, pour tout couple de points $x = a, x = b$, de (x_1, x_2) .

Supposons, à cet effet, le contraire, c'est-à-dire que, pour un certain ε , on ait

$$|f(b) - f(a)| \geq \varepsilon(b - a) . \quad (2)$$

¹ J'en ai donné d'autres précédemment, indépendantes aussi du théorème des accroissements finis. Mais elles utilisaient des notions de la théorie des ensembles, et le cas de la dérivée nulle y était traité d'une manière indirecte. Voir *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences*, tome I, 1934, p. 33-48.

Soit $c = \frac{a+b}{2}$. Si l'on avait, à la fois,

$$|f(c) - f(a)| < \varepsilon(c - a) , \quad |f(b) - f(c)| < \varepsilon(b - c) ,$$

on en déduirait, par addition,

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(c) - f(a)| + |f(b) - f(c)| < \varepsilon(b - a) .$$

c'est-à-dire l'inégalité (1) contraire à l'hypothèse (2). Donc, pour l'un au moins des intervalles (a, c) , (c, b) , que j'appellerai (a_1, b_1) , on aurait, comme pour (a, b) .

$$f(b_1) - f(a_1) \geq \varepsilon(b_1 - a_1) .$$

En raisonnant sur (a_1, b_1) comme on vient de le faire pour (a, b) , et ainsi de suite, on conclurait donc à l'existence d'une suite illimitée d'intervalles (a_k, b_k) , tels que $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, et dont chacun serait contenu dans le précédent, pour chacun desquels on aurait, comme pour (a, b) ,

$$|f(b_k) - f(a_k)| \geq \varepsilon(b_k - a_k) . \quad (3)$$

Mais les a_k et les b_k tendraient alors vers une limite commune, soit x_0 , appartenant à chaque intervalle (a_k, b_k) . Si l'un des a_k était égal à x_0 , il en serait de même pour tous les suivants: on aurait donc, à partir d'un certain rang,

$$x_0 - a_k = 0 , \quad f(x_0) - f(a_k) = 0 .$$

Dans le cas contraire, on aurait, pour k assez grand,

$$\left| \frac{f(a_k) - f(x_0)}{a_k - x_0} \right| < \varepsilon ,$$

puisque a_k tendrait vers x_0 , et que $f(x)$ aurait, pour $x = x_0$, une dérivée nulle. On aurait donc dans les deux cas, pour k assez grand,

$$|f(x_0) - f(a_k)| \leq \varepsilon(x_0 - a_k) ,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $x_0 = a_k$. On aurait, de même, pour k assez grand,

$$|f(b_k) - f(x_0)| \leq \varepsilon(b_k - x_0) ,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $x_0 = b_k$. Comme on ne saurait avoir $a_k = x_0 = b_k$, on conclurait, par addition,

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leq |f(b_k) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(a_k)| < \varepsilon(b_k - a_k) ,$$

ce qui serait en contradiction avec (3). L'hypothèse (2) est donc à rejeter, quel que soit ε . De sorte que (1) a bien lieu, pour tout ε (c.q.f.d.).

THÉORÈME II. — *Si une fonction $f(x)$, définie dans un intervalle (x_1, x_2) , y a, en tout point, une dérivée positive, elle est croissante dans cet intervalle.*

DÉMONSTRATION. — Il s'agit de prouver que, pour tout intervalle (a, b) contenu dans (x_1, x_2) , on a

$$f(b) - f(a) > 0 . \quad (1)$$

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que, pour un certain intervalle (a, b) , contenu dans (x_1, x_2) , on ait

$$f(b) - f(a) \leq 0 . \quad (2)$$

Soit $c = \frac{a+b}{2}$. Si l'on avait, à la fois,

$$f(b) - f(c) > 0 , \quad f(c) - f(a) > 0 ,$$

on en conclurait, par addition, l'inégalité (1), contraire à l'hypothèse faite (2). Donc, pour l'un au moins des intervalles (a, c) , (c, b) , que j'appellerai (a_1, b_1) , on devrait avoir, comme pour (a, b) ,

$$f(b_1) - f(a_1) \leq 0 .$$

En raisonnant sur (a_1, b_1) comme on vient de le faire pour (a, b) , et ainsi de suite, on conclurait donc à l'existence d'une suite illimitée d'intervalles (a_k, b_k) , tels que $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, et dont chacun serait contenu dans le précédent, pour lesquels on aurait, comme pour (a, b) ,

$$f(b_k) - f(a_k) \leq 0 . \quad (3)$$

Mais les a_k et les b_k tendraient alors vers une limite commune, soit x_0 , appartenant à chacun des intervalles (a_k, b_k) . Si l'on avait $a_k = x_0$ pour une valeur de k , il en serait de même pour les valeurs suivantes: on aurait donc, à partir d'un certain rang,

$$x_0 = a_k, \quad f(x_0) - f(a_k) = 0.$$

Dans le cas contraire, on aurait, pour k assez grand,

$$\frac{f(a_k) - f(x_0)}{a_k - x_0} > 0, \quad a_k - x_0 < 0,$$

puisque a_k tendrait vers x_0 , pour k infini, et que $f(x)$ aurait, pour $x = x_0$, une dérivée positive. On aurait donc, dans les deux cas, pour k assez grand

$$f(x_0) - f(a_k) \geq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $a_k = x_0$. On aurait de même, pour k assez grand,

$$f(b_k) - f(x_0) \geq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $x_0 = b_k$. Comme on ne peut pas avoir $a_k = x_0 = b_k$, on conclurait, par addition,

$$f(b_k) - f(a_k) > 0,$$

ce qui serait en contradiction avec (3). L'hypothèse (2) est donc à rejeter, quel que soit (a, b) , contenu dans (x_1, x_2) . De sorte que (1) a lieu pour tout couple de points $x = a$, $x = b$ de (x_1, x_2) (c.q.f.d.).
