

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515781>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

---

Avant d'exposer son intéressant exemple de fonction dépourvue de dérivée, M. R. TAMBS LYCHE remarque très justement que la première fonction de cette nature, celle due à WEIERSTRASS, conviendrait mal pour un enseignement élémentaire; cela m'a conduit à rechercher comment, de ce point de vue pédagogique, améliorer cet exemple qui, utilisant le développement en série de Fourier, a le grand avantage de montrer que des fonctions non dérivables peuvent se présenter au cours d'un calcul d'allure tout à fait normale. Cela est facile, aussi l'observation qui suit n'est certainement pas nouvelle; il peut cependant être utile de la publier ici.

Soit, par exemple, la fonction, évidemment continue,

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin 2^{n^2} x = \sum_1^{\infty} u_n(x), \quad (1)$$

On a:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n h} [\sin 2^{n^2}(x+h) - \sin 2^{n^2}x]. \quad (2)$$

La limite supérieure de la valeur absolue du  $n^{\text{ième}}$  terme de (2) est aussi celle de  $|u'_n(x)|$ , donc la valeur absolue de la somme des  $m - 1$  premiers termes de (2) est au plus

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{2^n} 2^{n^2} = \sum_1^{m-1} 2^{n^2-n} < 2^{(m-1)^2 - (m-1) + 1} = 2^{m^2 - 3m + 3},$$

car chaque terme  $2^{n^2-n}$  est inférieur à la moitié du suivant.

Donnons à  $h$  les quatre valeurs

$$h_1 = \frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_2 = \frac{-\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_3 = \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_4 = \frac{-3\pi}{2^{m^2+1}};$$

les arcs  $\alpha_n = 2^{n^2}x$  subissent alors, pour  $n > m$ , des accroissements, positifs ou négatifs, qui sont des multiples entiers de  $2\pi$  et, par suite, (2) se réduit à ses  $m$  premiers termes.

Pour  $n = m$ , l'arc  $\alpha_n$  subit un accroissement

$$\frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{3\pi}{2};$$

d'où, pour  $\sin \alpha_m$ , un accroissement  $(\cos \alpha_m - \sin \alpha_m)$  ou  $-(\cos \alpha_m + \sin \alpha_m)$ , et la somme des carrés de ces deux quantités étant égale à 2, l'une d'elles au moins n'est pas inférieure à 1 en valeur absolue. Ainsi, la valeur absolue du  $m^{\text{ième}}$  terme de (2) est au moins

$$\frac{1}{2^m \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}} = \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi},$$

soit pour  $h_1$  et  $h_4$ , soit pour  $h_2$  et  $h_3$ , et d'ailleurs ce terme aura tel signe que nous voudrions puisque  $h_1$  et  $h_4$ ,  $h_2$  et  $h_3$  donnent des résultats de signes contraires.

En résumé, on aura:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi} - 2^{m^2-3m+3};$$

donc  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  augmente indéfiniment en valeur absolue pour la suite des valeurs de  $h$  que nous associons à la suite des entiers  $m$ , et cela avec le signe que nous voulons.

*La fonction  $f(x)$  n'a donc en aucun point une dérivée déterminée, ni finie, ni infinie.*

Si, au lieu d'avoir affaire à des élèves débutants, il s'agissait d'étudiants au courant des profonds résultats de M. DENJOY sur l'indétermination du rapport (2), la fonction  $f(x)$  fournirait un exercice facile et instructif: classer les diverses valeurs de  $x$  dans les quatre types prévus par M. Denjoy.