I. RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Le *Traité de Calcul intégral* d'EULER représente jusqu'aujourd'hui une œuvre modèle sur ce genre d'études, même en prenant en considération les progrès énormes acquis par la Science moderne.

Or, tandis que les méthodes immédiates d'intégration sont exposées, dès le début, dans les traités d'équations différentielles ordinaires, on ne s'en occupe presque pas dans la théorie d'équations aux dérivées partielles, surtout du second ordre. Ces méthodes n'y sont pas favorisées. En effet, la fécondité d'une nouvelle méthode quelconque que l'on introduit, en Mathématiques, est prouvé par des applications aux exemples. On choisit ces derniers de telle manière que l'application, aux mêmes exemples, d'autres méthodes ne produise pas de bons résultats. Quant aux équations aux dérivées partielles du second ordre, ce n'est pas toujours le cas.

Citons, par exemple, l'excellente exposition de la méthode de Monge-Ampère donnée par G. DARBOUX[1]. Elle est suivie de quatre exemples que l'on expose ordinairement dans ce but: l'équation des surfaces développables, celle des surfaces aux lignes de courbure planes, des surfaces réglées à plan directeur et l'équation de la théorie mécanique de la chaleur.

Cependant tous ces problèmes admettent une solution immédiate la plus élémentaire. Les solutions de deux premiers problèmes se trouvent respectivement dans le *Traité d'Analyse* de M. E. PICARD (T. I, 1891, p. 296) et dans le *Cours d'Analyse* de G. HUMBERT (T. II, 1904, p. 471). Les deux autres équations mentionnées seront intégrées plus loin, au chapitre IV.

A présent exposons, pour fixer les idées, plusieurs procédés d'intégration immédiate.

I. — RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

Considérons, d'abord, les équations ne contenant qu'une paire de dérivées qui soient prises par rapport à une seule et même variable indépendante, à savoir p et r, ou q et t, en conservant

[1] *Leçons sur la Théorie des surfaces.* Troisième partie. Paris, 1894, p. 273, n° 716.

les désignations habituelles des dérivées du premier et du second ordre. Par conséquent, les équations dont il s'agit, se présentent sous l'une de deux formes générales suivantes:

$$F(x, y, z, p, r) = 0, \tag{1}$$

$$\Phi(x, y, z, q, t) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) peut donc s'écrire:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0.$$

On intègre cette dernière équation comme une équation aux différentielles ordinaires à une fonction inconnue z d'une variable indépendante x, considérant y au titre d'un paramètre constant; mais, en revanche, les constantes arbitraires de l'intégrale générale de cette dernière équation doivent être remplacées par deux fonctions arbitraires de y.

D'une manière analogue, dans la seconde équation (2), la variable x est considérée au titre d'un paramètre constant. Quant à l'intégrale générale de l'équation en question (2), elle dépendra de deux fonctions arbitraires de x.

Un autre type d'équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables, par un procédé analogue, se met sous l'une de deux formes suivantes:

$$F(x, y, p, s) = 0, \tag{3}$$

$$\Phi(x, y, q, s) = 0. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) ne contiennent point explicitement la fonction inconnue z; mais, outre la seule dérivée mixte du second ordre s, chacune des équations n'admet que l'une des dérivées du premier ordre p ou q.

C'est par rapport à ces dernières dérivées que les équations étudiées deviennent aux différenciations ordinaires du premier ordre. En effet, les équations (3) et (4) peuvent être mises respectivement sous la forme suivante:

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0. \tag{6}$$

L'équation (5) est donc différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue p de la variable indépendante y, en traitant x comme une constante. L'intégrale générale de l'équation (5) va s'écrire, par conséquent, de la manière suivante:

$$f(x, y, p, X) = 0 , \tag{7}$$

X désignant une fonction arbitraire de x, qui s'introduit, au lieu d'une constante arbitraire d'intégration.

L'équation obtenue (7) est encore différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue z, car on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} ,$$

la variable y est, à présent, à considérer comme une valeur constante. Supposons que l'on obtienne, en résolvant l'équation (7) par rapport à p:

$$p = \theta(x, X, y) . \tag{8}$$

Grâce à l'hypothèse introduite par rapport à y, l'équation (8) donne, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation (3)

$$z = \int \theta(x, X, y)\, \partial x + Y ,$$

où Y est la seconde fonction arbitraire qui ne dépend que de y.

La seconde équation (6) va s'intégrer d'une manière analogue; et l'intégrale générale de l'équation (4) impliquera deux fonctions arbitraires, dont la première ne contient que y et la seconde sera une fonction de la variable x.

II. — Réduction aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons, d'abord, les équations de la forme suivante:

$$F(x, y, p, r, s) = 0 , \tag{1}$$

$$\Phi(x, y, q, s, t) = 0 . \tag{2}$$