

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES DIVISIONS SEMBLABLES TRACÉES SUR LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE
Autor: Marchay, R.
Kapitel: III. — Systèmes convergents.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28036>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

d'où

$$\widehat{S_1B} - \widehat{CS'_1} = 2\varphi, \quad \widehat{S_1B} - \widehat{CS_2} - \widehat{S_2S'_1} = 2\varphi$$

$$\begin{aligned} 2\varphi &= -\widehat{BA} - \widehat{AS_1} - \widehat{CS_3} - \widehat{S_2S'_1} = -\widehat{BA} - s_1 + \widehat{S_2A} + \widehat{AC} - s_3 \\ &= -\widehat{BA} + \widehat{AC} - s_1 - s_2 - s_3 \end{aligned}$$

et

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi = \widehat{AB} + \widehat{BA'} = \widehat{AA'} = \alpha$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + 2\varphi - \alpha = 0.$$

Résultat qui généralise la formule donnée par M. Boulanger (N.A., 1919, p. 22).

III. — SYSTÈMES CONVERGENTS.

7. — Soient l, m, n , des constantes proportionnelles aux éléments homologues des trois divisions du n° I.

Si l'on a

$$al + bm + cn = 0, \quad (1)$$

il existe toujours, en vertu du théorème des projections, une droite D et un angle φ , tels que les projections (φ) sur les côtés, d'un point S de cette droite, déterminent les trois divisions proposées.

S, S_2 , étant les intersections de D avec le cercle circonscrit, les droites Δ_1, Δ_2 du système sont les droites de Simson (φ) de ces points.

Si S se transporte à l'infini, en vertu du n° II-4, le cercle de rayon infini correspondant, se compose de la droite de l'infini et de la droite de Simson ($\pi - \varphi$) d'un point S_3 tel que AS_3 soit antiparallèle à D par rapport à l'angle B.A.C.

Désignons par δ cette droite de Simson. On voit qu'elle est la même, que S s'éloigne indéfiniment dans un sens ou dans l'autre.

L'équation (1) constitue donc une condition suffisante de convergence du système.

8. — Soient λ', μ', ν' les angles dirigés de D avec a, b, c . On a

$$\frac{\sin \cdot (\lambda' - \varphi)}{l} = \frac{\sin \cdot (\mu' - \varphi)}{m} = \frac{\sin \cdot (\nu' - \varphi)}{n} \quad (2)$$

Soient dans un système quelconque supposé convergent λ, μ, ν les seconds points d'intersections de Γ avec a, b, c ; on a

$$\frac{A\mu}{A\nu} = \frac{AN}{AM}$$

et si S se transporte à l'infini

$$\lim \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m},$$

λ, μ, ν sont alors en ligne droite, désignons par les mêmes lettres les angles que fait cette droite avec les côtés, on a

$$\frac{\sin \nu}{\sin \mu} = \frac{A\mu}{A\nu} = \frac{n}{m}.$$

On aurait de même

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} = \frac{l}{m},$$

$$\frac{\sin \lambda}{l} = \frac{\sin \mu}{m} = \frac{\sin \nu}{n} \quad (3)$$

Or

$$a \sin \cdot \lambda + b \sin \cdot \mu + c \sin \cdot \nu = 0,$$

donc

$$al + bm + cn = 0,$$

ce qui prouve que la condition (I) du n° 7 est nécessaire.

La droite $\lambda \mu \nu$ est la droite δ du système.

La comparaison de (2) avec (3) montre que δ est parallèle à toute droite qui fait avec les côtés, les angles $(\lambda - \varphi), (\mu' - \varphi), (\nu' - \varphi)$, donc

$$(D, \delta) = \varphi.$$

9. — La formule (1) est la condition nécessaire et suffisante pour que le moment de la vitesse du barycentre L.M.N., par rapport au point de Lemoine soit nul. La condition nécessaire

et suffisante de convergence est donc que le barycentre $L.M.N.$ décrive une droite qui passe par le point de Lemoine.

La condition peut encore s'écrire

$$l \sin \cdot A + m \sin \cdot B + n \sin \cdot C = 0$$

et sous cette forme, elle s'applique au cas où les côtés passent par un même point.

10. — Nous arrivons, maintenant, à la propriété capitale des systèmes convergents.

Soient, V un point quelconque du plan; $L_1.M_1.N_1.$, trois points homologues fixes du système; L, M, N , trois points homologues quelconques.

Je fais une inversion de pôle V , en adoptant les notations du n° I — $L'.M'.N'$. enveloppent respectivement les coniques (C) et (A).

Soit zz', xx' les positions limites de ces droites quand L est à l'infini, $\lambda_1 \mu_1$, les angles de zz' , avec a et b ; μ_2, ν_2 les angles de xx' avec b et c . On a

$$\frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L'_1 L'}} = \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{L'_1 V}}, \quad (1)$$

$$\frac{\overline{M_1 M}}{\overline{M'_1 M'}} = \frac{\overline{M_1 V}}{\overline{M'_1 V}}, \quad (2)$$

$$\frac{\overline{N_1 N}}{\overline{N'_1 N'}} = \frac{\overline{N_1 V}}{\overline{N'_1 V}}. \quad (3)$$

(1) et (2) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\overline{M'_1 V}}{\overline{L'_1 V}} \times \frac{\overline{L_1 V}}{\overline{M_1 V}} &= \frac{\overline{M'_1 M'}}{\overline{M_1 M}} \times \frac{\overline{L_1 L}}{\overline{L'_1 L'}}, \\ \frac{\overline{M'_1 V}}{\overline{L'_1 V}} &= \frac{\overline{M_1 V} \times \overline{M'_1 M}}{\overline{L_1 V} \times \overline{L'_1 L'}} \times \frac{l}{m}, \end{aligned} \quad (4)$$

or, à la limite, si L est à l'infini

$$\overline{L'_1 L'} = \overline{L'_1 V}, \quad (5)$$

$$\overline{M'_1 M'} = \overline{M'_1 V}, \quad (6)$$

d'un autre côté

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \lim \cdot \frac{\sin \widehat{M'L'V}}{\sin \widehat{L'M'V}} = \lim \cdot \frac{M'V}{L'V} \quad (7)$$

et d'après (4), (5), (6)

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \mu_1} = \frac{\overline{M_1V} \cdot M'V}{\overline{L_1V} \cdot L'_1V} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m} \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \mu_1 = \mu. \quad (9)$$

On aurait de même $\mu_2 = \mu$, $\nu_2 = \nu$, donc zz' et xx' se confondent avec une parallèle à δ .

Les deux coniques (C) et (A) ont cette parallèle pour tangente commune. Le cercle Γ correspondant est une ligne droite qui passe par V et se confond avec xz ; il peut être exclu du groupe des quatre cercles Γ qui passent en général par V.

Donc: *dans tout système convergent, l'enveloppe de la corde commune au cercle variable Γ et à une position fixe Γ_0 quelconque de ce cercle est une conique Σ tangente à Δ_1 , Δ_2 et δ .*

IV. — SYSTÈMES ORTHOGONAUX.

11. — Si Δ_1 , Δ' et δ passent par un même point Ω la conique Σ se réduit à Ω et, par suite, la corde commune à Γ et Γ_0 passe constamment par ce point.

Donc dans tout système convergent, si Δ_1 , Δ' et δ passent par un même point, le cercle Γ reste orthogonal à un cercle fixe, ayant pour centre le point d'intersection de ces trois droites.

Nous dirons alors que le système est *orthogonal*.

12. — Soient l , m , n , les trois paramètres définis au n° 7, et satisfaisant à l'équation (1) de ce numéro.

Proposons-nous de construire un système convergent orthogonal, l'angle φ étant arbitraire.

La direction δ est donnée par les équations (3) n° 8 et δ se trouve comme étant une droite de Simson ($\pi - \varphi$) de direction donnée.