

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES RÉELLES DU PLAN
Autor: Guilhem, R. Saint
Kapitel: Chapitre III. — Les transformations circulaires inverses.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28031>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et les équations de $\mathcal{C}_l$ sont

$$x' = x + a, \quad y' = y \quad (13)$$

$\left(a = \frac{r^2}{\Phi O} \text{ n'est pas un invariant}\right).$

Conclusion. — Tous les cas possibles ont été examinés. Retenons que *toute transformation circulaire directe est la transformée d'une similitude directe par une inversion.*

Ce théorème n'est pas vrai dans l'espace pour les transformations sphériques. Le théorème analogue pour les transformations inverses est vrai dans l'espace, mais non dans le plan.

CHAPITRE III. — LES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES INVERSES.

§ 8. — On a vu (§ 3) qu'elles sont de la forme $C = I\mathcal{O}$.

Nous allons les étudier d'une manière toute semblable à la précédente, mais les résultats seront essentiellement différents.

Généralités. — Dans le cas le plus général, le déplacement $\mathcal{O}$ est une rotation (fig. 11), d'un angle θ autour d'un point O ;

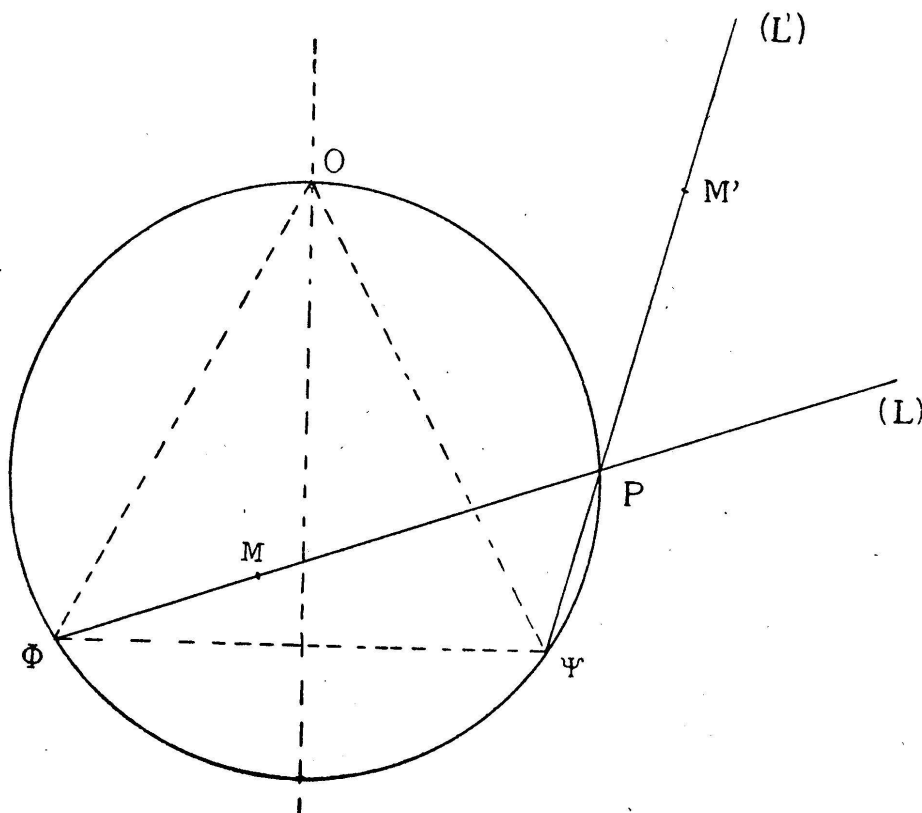


Fig. 11.

une droite (L) passant par le foyer objet Φ devient une droite (L') passant par Ψ coupant (L) en un point P, qui, lorsque (L) tourne autour de Φ , décrit le cercle (C) passant par O, Φ , Ψ . La transformation C est définie si l'on se donne le cercle (C), les points Φ et Ψ sur ce cercle, et le rayon R du cercle (I) de centre Φ : on peut en effet construire alors l'homologue M' de M, qui se trouve sur (L'), et vérifie la relation $\Phi M \cdot \Psi M' = R^2$.

On vérifie que C dépend de six paramètres.

Le déplacement $\mathcal{O}$ peut en second lieu se réduire à une translation $\mathcal{L}$, définie par le vecteur $\vec{\mathcal{L}}$; on a alors $\overrightarrow{\Phi\Psi} = \vec{\mathcal{L}}$; la droite (L') est parallèle à (L), et l'on a toujours $\overrightarrow{\Phi M} \cdot \overrightarrow{\Psi M'} = R^2$.

Enfin le déplacement $\mathcal{O}$ peut se réduire à la transformation identique. C se réduit alors à une simple inversion (I).

Les trois catégories ci-dessus correspondent aux C proprement dites; pour avoir toutes les transformations circulaires inverses, il convient d'y ajouter les similitudes inverses: proprement dites S, retournements D, symétries R.

§ 9. — THÉORÈME IX. — *La transformation C, si elle ne se réduit pas à une inversion, admet soit deux points doubles réels, soit un couple de points conjugués réels.* (Rappelons que si C se réduit à une inversion, elle admet un cercle de points doubles, et tous les points du plan sont deux à deux conjugués, puisque la transformation est réciproque.)

Démonstration: 1° *Cas général.* $C = I\mathcal{R}$. — Cherchons d'abord les points doubles. Si ω est point double de C, il est sur le cercle (C) et l'on a $\Phi\omega \cdot \Psi\omega = R^2$. Le symétrique ϖ de ω par rapport à la médiatrice (D) de $\Phi\Psi$ est aussi un point double (fig. 12). Si ω_1 est l'inverse de ω dans l'inversion (I), le cercle passant par ω , ω_1 , et ϖ , est orthogonal à (I) et a pour centre le point O: en effet, son centre doit être sur la médiatrice (D) de $\Phi\Psi$ et sur la bissectrice de $\Phi\omega$ et $\Phi\varpi$ puisque $\Phi\omega_1 = \Phi\varpi$. D'où la construction: mener le cercle de centre O orthogonal au cercle (I); il coupe le cercle (C) en ω et ϖ qui sont les points doubles cherchés. Plusieurs cas sont à distinguer:

- a) O est extérieur à (I) ; deux points doubles réels;
- b) O est sur (I) ; deux points doubles confondus avec O ;
- c) O est intérieur à (I) ; pas de points doubles réels.

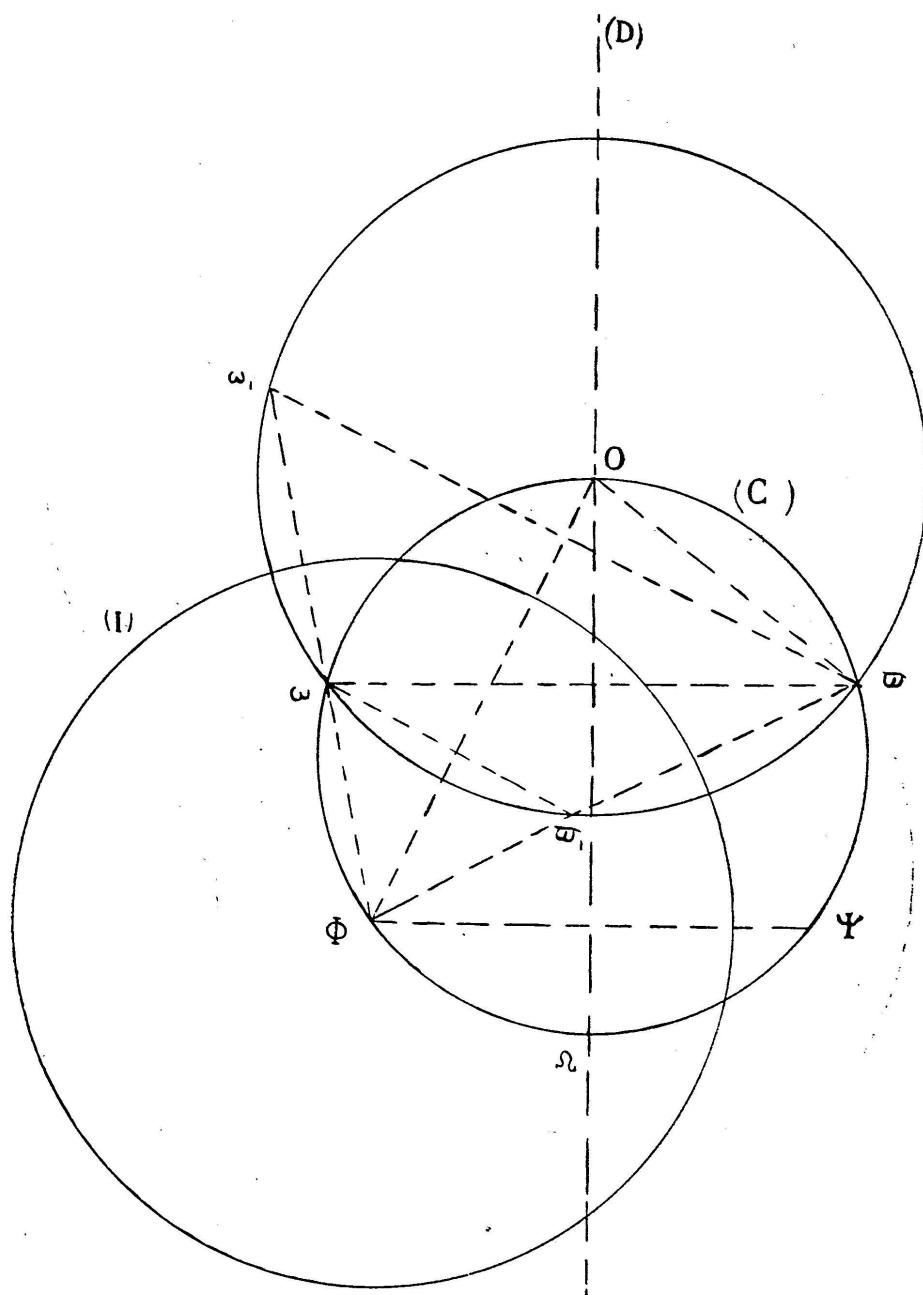


Fig. 12.

Cherchons maintenant s'il y a des couples de points ω , $\bar{\omega}$ conjugués, c'est-à-dire tels que $\bar{\omega}$ soit le transformé de ω , et ω celui de $\bar{\omega}$.

Si ω , $\bar{\omega}$ est un tel couple, les droites $\Phi\omega$ et $\Psi\bar{\omega}$ se coupent en un point M du cercle (C) ; de même $\Phi\bar{\omega}$ et $\Psi\omega$ se coupent en un autre point N de ce cercle; cela entraîne que les bissectrices des angles en ω et $\bar{\omega}$ sont parallèles, puisque les triangles $\omega\Phi N$ et

$\omega\Psi M$ d'une part, $\varpi\Phi M$ et $\varpi\Psi N$ d'autre part, sont inversement semblables.

En second lieu on a $\Phi\omega.\Psi\varpi = R^2$ et $\Phi\varpi.\Psi\omega = R^2$, d'où

$$\frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi} \times \frac{\Psi\varpi}{\Psi\omega} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega\Phi}{\omega\Psi} = \frac{\varpi\Phi}{\varpi\Psi}.$$

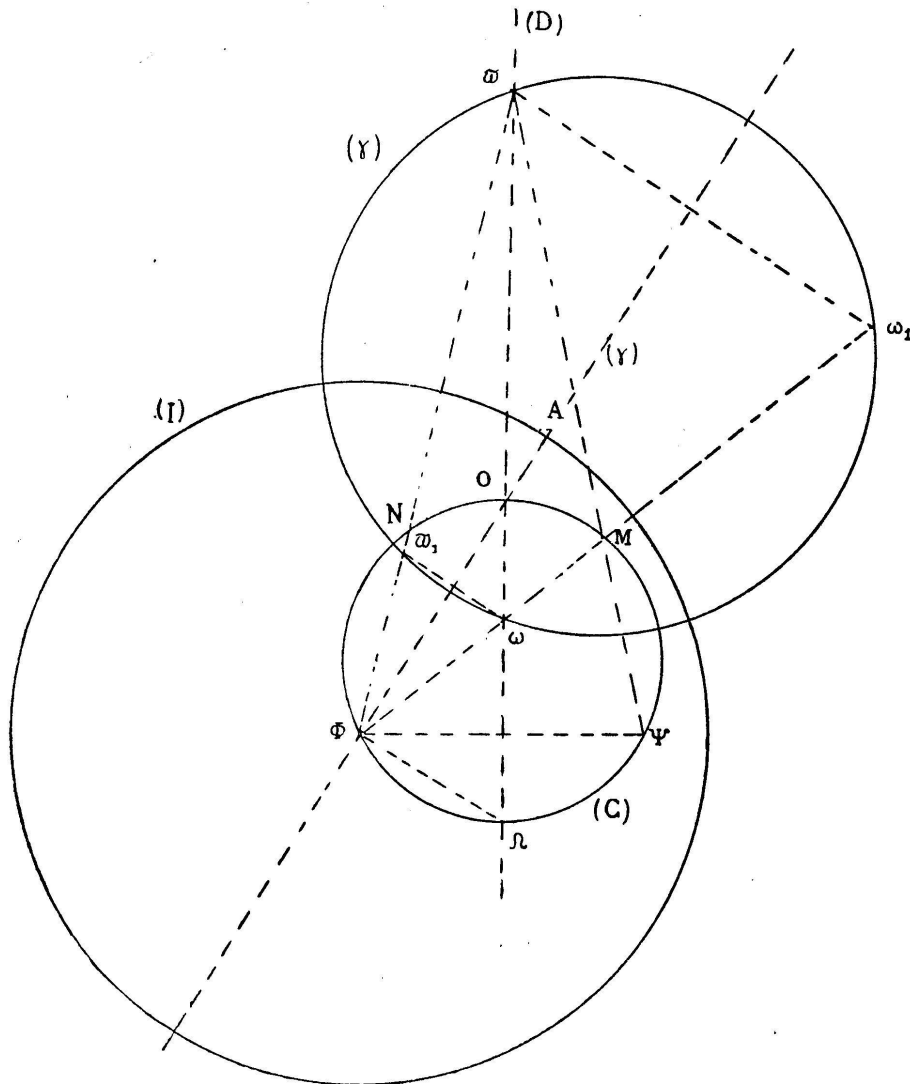


Fig. 13.

Il en résulte que les bissectrices dont on vient de parler coupent la droite $\Phi\Psi$ en un même point H, et sont par suite confondues. Donc ω , ϖ , H sont alignés; comme ils doivent être sur un même cercle du faisceau ayant Φ et Ψ pour points limites, cette droite est nécessairement (D). ω et ϖ sont donc sur (D), M et N sont symétriques par rapport à (D) (fig. 13). Par suite ΦO et $\Phi\Omega$ sont les bissectrices de $\Phi\omega$ et $\Phi\varpi$. Il en résulte que si ω_1 est l'inverse de ω , ϖ_1 celui de ϖ , dans l'inversion de cercle (I),

le cercle (γ) passant par $\omega\omega_1\varpi\varpi_1$, orthogonal à (I), et ayant son centre sur ΦO , est en outre orthogonal au cercle (C).
Donc

$$\overline{\gamma O} \cdot \overline{\gamma \Phi} = \rho^2 = \overline{\gamma A} \cdot \overline{\gamma B} = \overline{\gamma \Phi}^2 - R^2.$$

D'où

$$\overline{\Phi O} \cdot \overline{\Phi \gamma} = (\overline{\Phi \gamma} + \overline{\gamma O}) \overline{\Phi \gamma} = \overline{\Phi \gamma}^2 - [\overline{\gamma \Phi}^2 - R^2] = R^2. \quad (14)$$

γ est l'inverse de O par rapport au cercle (I). D'où la construction: par γ , inverse de O, mener le cercle (γ) orthogonal à (I), qui coupe (D) en ω et ϖ . Ces deux points sont conjugués dans la transformation C. Les cas à distinguer sont les mêmes que dans l'étude des points doubles ci-dessus:

- a) O extérieur à (I): pas de points conjugués;
- b) O sur le cercle (I): par convention, deux points conjugués confondus avec le point O;
- c) O intérieur à (I): un couple de points conjugués ω et ϖ .

Le théorème annoncé est donc démontré dans le cas de la rotation.

2^o *Cas de la translation* $C = I\mathcal{L}$. — Le cercle de centre O, milieu de $\Phi\Psi$, coupant (I) diamétralement, coupe cette droite $\Phi\Psi$ en deux points ω et ϖ qui sont points doubles de C. Ces deux points sont toujours réels (fig. 14).

Le théorème IX est aussi complètement démontré.

Les points ω et ϖ , qu'ils soient points doubles ou points conjugués, seront dits les *pôles* de la transformation C.

La figure formée par les deux foyers et les deux pôles admet dans tous les cas l'axe de symétrie (D).

Nous sommes donc amenés à distinguer trois espèces de transformations circulaires inverses C, d'après la nature de leurs pôles (qui est un caractère intrinsèque):

- a) Celles de la forme $C = I\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est soit une translation, soit une rotation autour d'un point O extérieur au cercle (I). Elles ont deux points doubles réels et pas de points conjugués réels; nous les appellerons « transformations circulaires inverses à pôles doubles », et les désignerons par le symbole C_h pour une raison qui apparaîtra dans la suite;

b) Celles de la forme $C = I\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est une rotation autour d'un point O situé sur le cercle I . Ce sont les « C à pôles confondus », désignées par C_l ;

c) Celles où $\mathcal{O}$ est une rotation autour d'un point O intérieur au cercle (I) . Ce sont les « C à pôles conjugués » ou C_r . Ici, pas de points doubles réels, mais deux points conjugués réels.

Les inversions I , correspondant à $\mathcal{O}$ réduit à la transformation identique, constituent un cas particulier commun aux trois espèces précédentes.

Remarquons en outre, dès à présent, que les similitudes inverses S rentrent dans les C_h , les retournements D dans les C_l , la symétrie R dans les I .

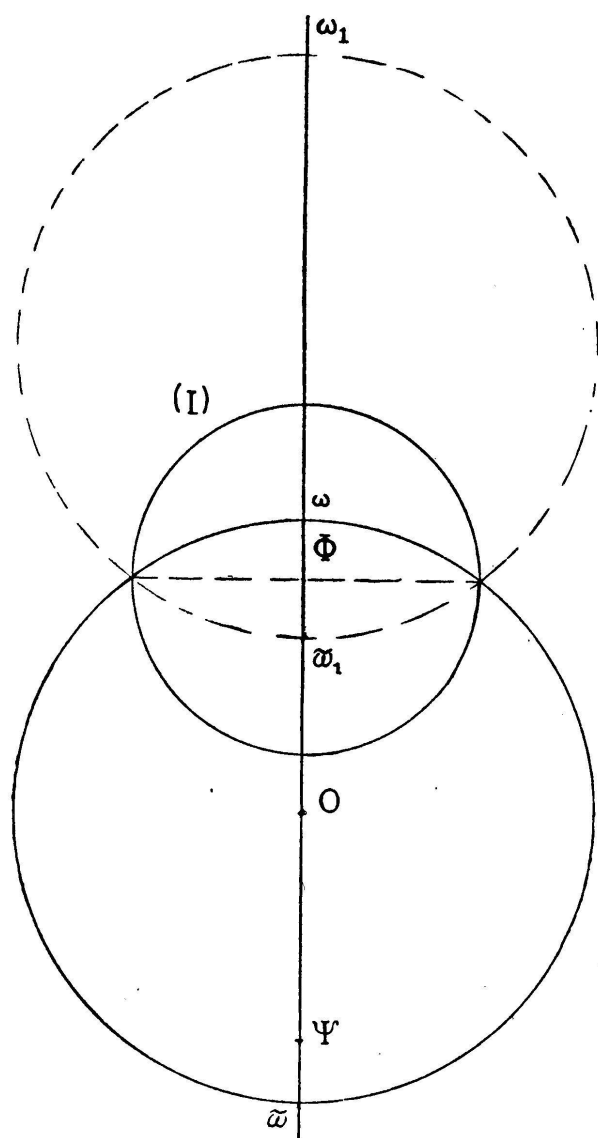


Fig. 14.

§ 10. — *Similitude inverse, ou antirotation, image d'une transformation circulaire inverse C .*

THÉORÈME X. — *Toute transformation de première espèce C_h peut être transformée en une similitude inverse S par une transformation Γ convenable, pour laquelle on peut prendre en particulier une simple inversion (cf. théorème VI).*

Il suffit, en effet, de prendre une Γ ayant pour foyer-objet l'un des pôles ω et $\bar{\omega}$.

THÉORÈME XI. — *Toutes les S ainsi obtenues sont semblables entre elles, et ont par suite le même rapport k (cf. théorème VII).*

THÉORÈME XII. — *Toute transformation de deuxième espèce C_l peut être transformée en un retournement D par une Γ convenable.*

Il suffit, en effet, de prendre une Γ ayant pour foyer-objet le pôle unique O de C_l .

Définition. — Nous appellerons *antirotation* le produit d'une inversion par une rotation quelconque autour du centre d'inversion. Les antirotations jouent, comme on va le voir, un rôle symétrique de celui des similitudes inverses.

THÉORÈME XIII. — *Toute transformation de troisième espèce C_r peut être transformée en une antirotation T par une Γ convenable.*

Il suffit encore de prendre une Γ ayant pour foyer-objet l'un des pôles conjugués, soit ω . C_r devient C'_r dans laquelle ω' et ∞ sont conjugués; donc les deux foyers Φ' et Ψ' de C_r sont confondus avec ω' . C'_r étant d'ailleurs de la forme $I'\mathcal{Q}'$, le déplacement $\mathcal{Q}'$ ne peut être qu'une rotation autour de Φ' . Donc C'_r est une antirotation T .

THÉORÈME XIV. — *Toutes les antirotations ainsi obtenues à partir d'une même C_r sont semblables, et ont par suite le même angle α .*

Remarquons en outre qu'une inversion I peut, si l'on veut, être transformée en une symétrie ou renversement R autour d'une droite.

THÉORÈME XV (fondamental). — *Quand C subit une transformation du groupe Γ , son image S ou T subit une similitude Σ .*

Démonstration tout analogue aux précédentes. Nous la refaisons, eu égard à l'importance du résultat; prenons par exemple le cas d'une C de troisième espèce, ayant pour image une antirotation T . On a:

$$C' = \Gamma^{-1} C \Gamma, \quad T = J^{-1} C J, \quad T' = K^{-1} C' K,$$

d'où l'on déduit

$$T' = K^{-1} \Gamma^{-1} J \cdot T \cdot J^{-1} \Gamma K = \Sigma^{-1} \Gamma \Sigma$$

en posant

$$\Sigma = J^{-1} \Gamma K.$$

On voit que Σ est une similitude, car

$$\infty \times J^{-1} \Gamma K = \varpi \Gamma K = \varpi' K = \infty .$$

Σ est directe ou inverse, suivant que Γ est elle-même directe ou inverse.

Donc le rapport k de la similitude image, ou l'angle α de l'antirotation image, constitue l'invariant de C dans le groupe Γ . Une C n'a donc qu'un invariant, alors qu'une $\mathcal{C}$ en avait deux.

Les résultats essentiels qui précèdent vont nous donner les propriétés intrinsèques des C des diverses espèces.

§ 11. — *Etude sommaire des différents types de transformations circulaires inverses.*

Première espèce: Transformations à pôles doubles C_h . — On a $C_h = I\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ étant une translation ou une rotation autour d'un centre O extérieur au cercle d'inversion (I). Pour la commodité, faisons, comme pour les $\mathcal{C}$, l'image de C avec une Γ directe, de foyer-objet ϖ , ϖ étant le pôle situé du côté de Ψ sur le cercle (C). Prenons ici encore des coordonnées polaires ρ , φ dans le plan-image, avec pour axe origine des angles l'axe ωx de la similitude inverse S . Prenons également dans le plan primitif les coordonnées circulaires σ et τ définies au § 7. On a encore les relations:

$$\varphi = \sigma - \sigma_0 , \quad \rho = a\tau . \quad (6)$$

Les équations de S s'écrivent:

$$\varphi' + \varphi = 0 , \quad \rho' = k\rho , \quad (15)$$

d'où

$$\sigma + \sigma' = 2\sigma_0 , \quad \tau' = k\tau . \quad (16)$$

k est un invariant (théorème XV), mais σ_0 n'en est pas un.

Appliquons comme précédemment les équations (16) au point Φ , de coordonnées

$$\sigma = (\overrightarrow{\Phi\varpi} , \overrightarrow{\Phi\omega}) , \quad \tau = \frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi} ,$$

dont le transformé est ∞ , de coordonnées $\sigma' = 0$, $\tau' = 1$. On a encore $k = \frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega}$ et en outre $2\sigma_0 = (\overrightarrow{\Phi\varpi} , \overrightarrow{\Phi\omega})$ ou $\sigma_0 = (\overrightarrow{\Phi\varpi} , \overrightarrow{\Phi O})$.

La conclusion est analogue à celle du § 9. La similitude image S est celle qui fait passer de ω à ϖ , lorsqu'on l'applique au centre Φ , avec l'axe ΦO (cf. fig. 12).

Mais ici la forme de la figure focale, c'est-à-dire du trapèze $\omega\varpi\Phi\Psi$, n'est pas invariante; seul le rapport $\frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega} = k$ est invariant. Il en résulte que si l'on transforme C par une Γ , pour déterminer C' , il ne suffit pas de donner ω' et ϖ' ; il faut encore donner l'homologue d'un cercle (σ) donné, ceci afin de déterminer σ_0 . En outre, on peut, si l'on veut, par une Γ convenable, donner au trapèze de base une forme quelconque assujettie seulement à vérifier $\frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega} = k$. Par exemple on pourrait le réduire à la forme aplatie pour étudier plus facilement les propriétés intrinsèques de C ; mais cela n'a pas d'intérêt. Cette forme aplatie correspond au cas où $\mathcal{O}$, dans $C = I\mathcal{O}$, est une translation (on vérifie ainsi que ce cas n'est pas intrinséquement distinct du cas de la rotation).

Revenons à l'étude de C_h par sa similitude image: les cercles (σ) sont *deux à deux conjugués*, et deux d'entre eux sont doubles: le premier est celui qui correspond à $\omega_i x$, le second à $\omega_i y$. Le premier est défini par $\varphi = 0$, $\sigma = \sigma_0$; c'est le cercle (Ω) dont le centre est le point Ω , autre que O , où (D) coupe le cercle (C). Le second est le cercle (Γ) orthogonal à celui-là: il a pour centre le point O . Sur le premier, les segments limités par ω et ϖ sont conservés; sur le second ils sont échangés. On aurait pu trouver directement ces deux cercles: (Γ) est orthogonal au cercle (I), (Ω) coupe (I) diamétralement.

Quant aux cercles (τ), ils sont transformés comme dans une $\mathcal{S}$ de pôles ω et ϖ , et de rapport k , d'après la formule $\tau' = k\tau$.

Si $k \neq 1$, C_h ne peut être involutive: $A_p \rightarrow \omega$, si $k < 1$, vers ϖ si $k > 1$. Si $k = 1$, S se réduit à une symétrie R , et C_h à une inversion I ; c'est le cas où l'angle de rotation θ est nul.

Deuxième espèce: Transformations C_l à pôles confondus. — $C_l = I\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant une rotation d'un angle θ autour d'un point O situé sur le cercle d'inversion (I).

Prenons son image avec une Γ de foyer-objet O ; on obtient un retournement R , produit d'une symétrie (i) par la rotation θ

autour de o . R devant amener φ en o , et o en ψ , l'axe de retournement passe par les milieux φ' de φO et ψ' de $O\psi$; le vecteur de retournement est $\overrightarrow{\varphi'\psi'}$ (fig. 15).

Avec les notations habituelles, on a

$$x = \frac{r^2}{OA}, \quad y = \frac{r^2}{OB}$$

et pour les équations de C_l :

$$x' = x + a, \quad y' + y = 2b.$$

Les cercles (σ) sont deux à deux conjugués avec un cercle double (Ω). Les cercles (τ) se transforment comme dans une C_l d'après la formule $x' = x + a$ (fig. 16).

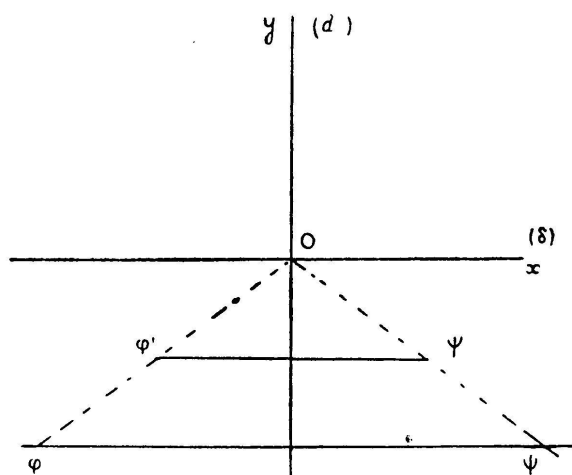


Fig. 15.

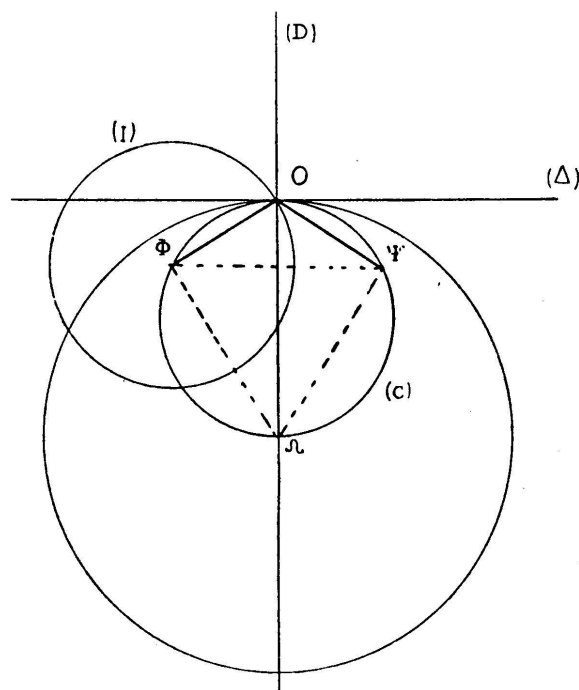


Fig. 16.

Troisième espèce: Transformations C_r à pôles conjugués. — Elles sont de la forme $C_r = I\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est une rotation autour d'un centre O intérieur au cercle (I). L'image est une antirotation T . Avec les mêmes notations que précédemment, les équations de T sont

$$\rho\rho' = \rho_1^2, \quad \varphi' = \varphi + \alpha, \quad (17)$$

d'où celles de C_r

$$\tau\tau' = t^2, \quad \sigma' = \sigma + \alpha, \quad (18)$$

en posant $t = \frac{\rho_1}{a}$.

α est invariant, mais non t^2 . En appliquant toujours au point Φ les formules (18) on a

$$\frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi} = t^2, \quad O = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi\omega}) + \alpha,$$

ou

$$t^2 = \frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi}, \quad \alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\varpi}).$$

L'antirotation T fait encore passer de ω à ϖ si on l'applique au centre Φ , avec un cercle convenable, qui n'est autre que le cercle d'inversion (I) (fig. 13). La transformée de C par Γ sera connue si l'on se donne ω' , ϖ' , et l'homologue d'un cercle (τ) donné; ce qui revient à se donner le foyer Φ' , par exemple, sur le cercle $\sigma = -\alpha$. La forme de la figure focale n'est pas invariante, puisque seul α l'est; on pourrait en particulier l'amener à un losange, cas qui correspond à une rotation composante autour de O , d'angle π .

Les cercles (τ) sont deux à deux conjugués, et il y a un cercle double, défini par $\tau = t$. C'est le cercle de centre Ω coupant (I) diamétralement. Quant aux cercles (σ) ils sont transformés, comme dans une C_r , d'après la formule $\sigma' = \sigma + \alpha$.

Comme T , C_r peut être involutive d'ordre $2p$ si 2α , angle de la rotation T^2 , est égal à $\frac{2\pi}{p} + 2m\pi$, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{\pi}{p} + m\pi$.

Pour chaque valeur de p , on a donc deux transformations C_r qui sont involutives d'ordre p ; l'une est égale à l'autre suivie d'une rotation de π (ou symétrie par rapport à un point) sur l'image, c'est-à-dire au produit de l'autre par une involution plane de pôles ω et ϖ , dans le plan primitif. Ce seront les deux « antiinvolutions d'ordre p », C_p et $C_{p'}$; on aura :

$$C_{p'} = C_p \mathcal{J}, \quad \text{ou} \quad C_p = C_{p'} \mathcal{J}.$$

Pour $p = 1$ on obtient les deux C réciproques, correspondant à $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$; la première n'est autre que l'inversion

simple I, la seconde l'inversion de puissance négative. (Dans le cours de cette étude, le mot « inversion » désigne toujours l'inversion de puissance positive.)

Pour $p = 2$, on obtient les deux antiinvolutions quaternaires :

$$C_2\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad C_2\left(\alpha = \frac{3\pi}{2}\right) . \quad \text{Etc. ...}$$

Remarque. Il était clair *a priori* qu'une C ne pouvait être involutive d'ordre impair $2p + 1$, car $C^{2p+1} = C^p.C$ est une transformation inverse C' , qui ne se réduit jamais à la transformation identique.

CHAPITRE IV. — APPLICATION À LA DÉCOMPOSITION DES DIVERSES TRANSFORMATIONS Γ .

§ 12. — *Groupe des transformations Γ ayant les mêmes pôles.* — On a vu qu'il était possible de transformer une Γ isolée en une image $\mathcal{S}$, S , ou T , c'est-à-dire en une autre Γ ayant un pôle à l'infini. Une pareille opération est évidemment impossible pour le groupe Γ lui-même, c'est-à-dire pour toutes les Γ du plan prises simultanément. Mais elle est possible pour le groupe partiel des Γ ayant un pôle déterminé. Prenons ici un groupe encore plus restreint : celui des Γ ayant en commun leurs deux pôles ω et ϖ ; une Γ auxiliaire ayant ϖ pour foyer-objet transforme ce groupe partiel en celui des similitudes ayant ω pour pôle. Par suite :

Le produit de deux $\mathcal{C}$ ayant les mêmes pôles ω et ϖ , de rapports k_1 et k_2 , d'angles α_1 et α_2 , respectivement, est une $\mathcal{C}$ de mêmes pôles, de rapport $k_1 k_2$ et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

Toutes les transformations $\mathcal{C}$ du groupe ainsi défini sont permutable entre elles. Celles d'un même type (homothétie ou rotation) forment un sous-groupe.

Les $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_r$ sont dites « transformations circulaires simples » parce qu'elles admettent un faisceau linéaire de cercles doubles ; chacune d'elles est caractérisée par un invariant k ou α . Une