

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

M. G.-A. MAGGI, ancien professeur de Mécanique rationnelle à l'Université de Milan, a été nommé membre de la Société italienne des Sciences, dites des XL.

Ont été nommés *professeurs extraordinaires* : pour l'Analyse algébrique et infinitésimale, M. G. RICCI, à l'Université de Milan; M. G. SCORZA-DRAGONI, à l'Université de Padoue; M. V. AMATO, à l'Université de Cagliari; pour la Mécanique rationnelle, MM. D. GRAFFI, R. EINAUDI, P. TEOFILATO, dans les Universités de Turin, Messine, Cagliari respectivement.

### Nécrologie.

On annonce la mort du savant ingénieur espagnol L. TORRÈS, Membre associé étranger de l'Académie des Sciences de Paris. Il avait apporté d'importantes contributions au problème difficile des machines à calculer et des automates.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

Paul PAINLEVÉ. — **Cours de Mécanique.** Tome II publié sous la Direction de M. Emile Borel. — Un volume grand in-8° de 750 pages et 195 figures. Prix: 140 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

L'œuvre pédagogique de Painlevé apparaîtra toujours comme quelque peu tourmentée. Le mathématicien, le professeur, l'homme d'Etat eurent à se dépenser en tant de domaines qu'on ne peut trouver, en aucun, une œuvre calmement assise. Contentons-nous de constructions géniales parfois insuffisamment mises au point mais qui n'en sont pas moins prodigieusement utiles. L'avenir les parachèvera.

Deux grandes tentatives de publication des Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique eurent lieu en 1929 et en 1930. Ce fut d'abord le Cours Painlevé-Platrier dont *L'Enseignement mathématique* rendit compte en 1930 (p. 357) et qui semblait être un Cours de Seconde année par rapport à un Tome premier également analysé ici (*loc. cit.*, p. 356). Ce Tome premier devait appeler une suite, due à Paul Painlevé lui-même, suite publiée maintenant sous la direction de M. Em. Borel et qui n'est pas sans refléter beaucoup de choses déjà introduites dans le Cours Painlevé-Platrier. Bien des notations tensorielles introduites dans ce dernier ouvrage semblent n'avoir pas été maintenues dans celui qui paraît aujourd'hui. On nous permettra de le regretter. Toutefois, il faut remarquer aussi que nous sommes maintenant aux prises avec nombre de problèmes exigeant plutôt des intégrations que des constructions d'équations. Et c'est dans le domaine

des intégrations que le talent de Paul Painlevé s'est surtout manifesté. La dynamique des solides de révolution, l'effet gyroscopique, la précession, la nutation exigent des discussions de nature intégrale qui sont d'une haute esthétique et aboutissent souvent à des graphiques intuitifs et élégants.

C'est après cette analyse savante que nous revenons (Ch. V) à la théorie générale des moments d'inertie et (Ch. VI) au mouvement d'un solide autour d'un axe, voire (Ch. VII) aux équations d'Euler. Ceci nous montre bien que le présent volume respecte un ordre historique. La mort a sans doute empêché Paul Painlevé de refondre les choses et M. Borel n'a pas voulu altérer un enseignement célèbre. Ceux qui sont capables de profiter de l'exposé ne se plaindront pas de sa forme « Cahier de Cours » d'ailleurs très à la mode. La dynamique du solide rappelle la manière de Paul Appell. Comment pourrait-il en être autrement ?

La Mécanique des Fluides (Livre II) est construite sur hypothèses mécanistes, en partant des plus simples et pour n'aboutir qu'en manière de synthèse aux équations générales. L'auteur a certainement tenu à donner satisfaction aux techniciens qui aiment à voir bâtir les théories matérielles en partant d'idées « simples » concernant la matière. Voici cependant quelques pages remarquables sur la similitude et le changement de  $t$  en  $-t$ . Puis le paradoxe de D'Alembert (p. 333). Les amateurs de structures mathématiques n'évitent pas cela non plus, mais ils n'ont pas promis de copier scrupuleusement des faits d'observation. Et, que l'on appartienne à une école ou à une autre, cette science hérissée de paradoxes n'en est pas moins celle du praticien. Il va falloir suivre les solides dans les fluides, c'est-à-dire les projectiles et les avions dans l'air. Ici Painlevé fut un créateur. Son exposition peut inspirer, en totalité ou presque, les Cours théoriques sur la Mécanique des fluides qui existent maintenant dans les Universités françaises.

Avec l'Elasticité (Livre III) les équations fondamentales précédentes s'étendent toujours par la méthode des descriptions matérielles. Espérons que les ingénieurs s'en rendront compte et ne voudront pas employer ces méthodes-là à la construction des électrons. L'accident n'est que trop connu. Mais ceci dit, il est certain qu'une belle théorie élastique vaut une belle théorie électrique et que, par de petits mouvements élastiques, on peut construire une théorie ondulatoire. La résistance des matériaux possède ses courbes remarquables et elle devient une science franchement dynamique quand il s'agit, par exemple, d'essais concernant des hélices d'avion.

Le Frottement (Livre IV) fut toujours, pour Paul Painlevé, un sujet de prédilection.

Ses Machines et Moteurs (Livre V) reviennent à l'hydrodynamique avec les turbines hydrauliques et, comme on ne peut guère parler de ces dernières sans parler des turbines à vapeur, nous voici dans les moteurs thermiques. L'association est des plus naturelles.

Au total, il s'agit d'un fort beau volume, faisant le plus grand honneur à la Science française. Je regrette de n'y point trouver une Préface en laquelle M. Borel aurait renseigné le lecteur non polytechnicien sur l'histoire de ce Cours, sur la façon dont les différentes parties ont été retrouvées et réunies. Pourquoi, en outre, l'influence de M. Charles Platrier ne s'y fait-elle plus sentir ?

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Analogies entre la Théorie des Equations différentielles linéaires et la Théorie des Equations algébriques.** — Un fascicule gr. in-8° de VIII-77 pages. Prix: 25 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Ceci est une reproduction du dernier Chapitre du Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Emile Picard. Heureuse idée. On aurait pu croire que le sujet n'était abordable qu'après une laborieuse étude de tout un immense et savant ouvrage. Il n'en est rien. Les groupes de Sophus Lie se révèlent plus que jamais à la base de l'Analyse. Leur structure est *algébrique*, ils admettent des représentations *linéaires*, ils sont constructibles par systèmes différentiels *linéaires*. Dès lors, on peut remonter — et de plusieurs manières — des équations différentielles linéaires aux théories algébriques créées par Evariste Galois.

Sophus Lie lui-même a présenté ses créations en les dédiant à notre Ecole normale supérieure et à son immortel élève Galois, mais ceci a encore été fait dans le tome terminal des *Transformationsgruppen*, donc dans un troisième volume. Et, comme tout à l'heure, la question se pose de savoir ce que l'on devra étudier avant d'arriver aux analogies galoisiennes.

M. Emile Picard a heureusement coupé au court. Il conserve l'esprit de Lie et la méthode des transformations infinitésimales. Mais il parvient, presque immédiatement, en partant d'une équation différentielle linéaire, aux fonctions rationnelles de  $y, y', y'', \dots$  invariables par substitutions linéaires associées. Le sujet a également intéressé Paul Appell. On ne l'approfondit pas sans approfondir l'étude du groupe linéaire, homogène et paramétriquement algébrique à transformation possible en groupe paramétriquement rationnel. On se trouve en contact avec les réductions et représentations matricielles des théories d'aujourd'hui.

Plus avant on se convainc que des groupes de substitutions linéaires et algébriques peuvent se comporter comme les groupes de substitutions, entre  $n$  lettres, dans la théorie des équations algébriques. C'est toujours du calcul matriciel né à une époque où l'on ne parlait pas de ce calcul. M. Emile Picard rappelle donc, fort à propos, de belles méthodes, existant depuis longtemps et que des différences de terminologie menaçaient d'une méconnaissance ou d'un oubli fort injuste. La notion de groupe *intégrable* assure même d'intéressants rapprochements avec les constructions structurales de M. Elie Cartan.

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Discours et Notices.** — Un volume in-8° (23 × 14) de VIII-366 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Œuvre surtout littéraire qui honore, une fois de plus, le Membre de l'Académie française et s'ajoute à des *Discours et Mélanges*, à des *Mélanges de Mathématiques et de Physique* ainsi qu'à des *Eloges et Discours académiques* (voir *L'Enseignement mathématique*: **24**, 1924-25, p. 162; **30**, 1931, p. 152). Une Introduction sert à lier des choses d'abord séparées et l'auteur y parle d'une crise de la Physique, de celle causée par la dualité des ondes et des corpuscules, par les microstructures à mesures équivoques, par les incertitudes à la Heisenberg, par les insuffisances du Principe de Causalité. Ce qui n'empêche pas que nous abordons ensuite « La vie et l'œuvre de G. Lippmann », physicien qui ne voulut guère connaître que d'admirables réalités expérimentales. Même remarque au sujet de Joseph Boussinesq. Ce dernier aimait les représentations *physiques*, les comparaisons. Les

représentations d'aujourd'hui par matrices et par moules analytiques l'auraient indisposé. Et cependant, il fit de la philosophie scientifique ! Il faut donc toujours remarquer que ce que l'on apprécie au maximum est l'art de construire. Tout sera permis au bon constructeur, alors que sa construction, s'ajoutant à tant d'autres, sera bientôt assimilée à une pièce de musée.

Albert Michelson conduit à des réflexions analogues. Il a fait douter de l'éther, il fut einsteinien avant la lettre mais sa tournure d'esprit ne lui permettait guère de s'associer aux doutes qu'il faisait naître chez les autres. Ici une grande fixité de vues permet de réaliser « des idées » ; elle ne permet pas de dominer un monde d'idées comme celui des théories électroniques ou photoniques.

En traitant, à l'Université Clark, en 1899, de « L'extension de l'idée de fonction pendant le dix-neuvième siècle », M. Emile Picard a fait de merveilleuses prophéties pour le siècle présent. Il était donc indiqué, au plus haut point, de reproduire un exposé datant d'une quarantaine d'années.

Abrégeons pour le reste, pour Sadi Carnot et la puissance motrice du feu, pour les aperçus techniques concernant l'Ecole Centrale et l'Ecole normale de Sèvres. Descartes et le Discours de la Méthode sont habilement replacés dans un monde intuitif que l'auteur du Discours croyait surtout logique.

Le jubilé d'Edouard Goursat et de Marcel Brillouin terminent, en toute cordialité, des pages dont la philosophie propre est faite d'une profonde sérénité.

A. BUHL (Toulouse).

E. CARTAN. — **Leçons sur la Théorie des Espaces à connexion projective** rédigées par P. Vincensini (Cahiers scientifiques publiés sous la Direction de M. Gaston Julia. Fascicule XVII). — Un volume gr. in-8° de vi-308 pages et 34 figures. Prix: 85 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Encore un Cours, de M. Elie Cartan, qui paraît représenter l'une des plus belles formes de la Géométrie. La Géométrie différentielle projective concerne les propriétés conservées par la transformation homographique. Au premier abord ceci est d'aspect élémentaire et cependant, rien qu'en interprétant la petite fonction homographique à variable complexe  $z$ , on arrive à l'automorphisme selon Klein et Poincaré. Et, au delà, il y a les espaces « à connexion projective » qui, en somme, peuvent être fort quelconques mais dans lesquels l'instrument d'analyse sera la Géométrie précédente. D'où des Gravifiques, des Théories universelles, à connexion projective. Ces constructions tentent, avec quelques insuffisances mais aussi avec de remarquables succès, d'égaliser et parfois de surpasser la Gravifique einsteinienne bâtie dans l'espace de Riemann. On peut se demander si de telles théories existeraient, sous leur forme actuelle, si le prodigieux animateur qu'est Albert Einstein n'avait lancé la Science dans des voies longtemps insoupçonnées. Pourquoi pas ? Ainsi la géométrie projective des courbes planes est due à G. Halphen, d'où de belles notions d'invariance, travaillées encore par Paul Appell, avec lesquelles on pourrait faire bien des choses. Oui, mais il est probable que tout cela serait resté science abstraite, comme précisément la géométrie différentielle riemannienne, si Einstein n'en avait indiqué la valeur physique, certaine au point de vue métrique, possible maintenant au point de vue projectif. Pour reprendre une expression due à M. Cartan lui-même, nous sommes encore

dans l'un des cas du « contre-coup formidable » subi par la Géométrie, du fait de l'apparition du mouvement einsteinien.

Dans ce livre si profond et intéressant, M. Cartan commence naturellement par étudier la droite projective réelle ou les mouvements rectilignes d'un point  $M$ , quand le rapport anharmonique (MABC) est une fonction de  $t$ . Deux mouvements projectivement égaux conduisent immédiatement (dès la page 3) à la dérivée de Schwarz bientôt associée à une équation différentielle linéaire du second ordre. Des réciprociétés entre points mobiles et points repères développent cette analyse. L'introduction de variables complexes fait retrouver ces repères dans la Géométrie de Poincaré étendue alors au champ complexe. Ceci est d'une simplicité inattendue quant à l'approche des fonctions fuchsienues ou kleinéennes ou, tout au moins, des groupes qui leur servent de support.

Dans le plan réel (Ch. II), la généralisation de telles considérations conduit aux réductions d'équations différentielles linéaires du troisième ordre. A signaler ici le *développement projectif* d'une courbe provenant de la possibilité de définir un rapport anharmonique sur la tangente. Il y a de même une *courbure projective*. Tout ceci fait intervenir des éléments différentiels d'ordre élevé d'où une géométrie plus compliquée que celle d'Euclide mais qui interprète des systèmes différentiels nouveaux. Les équations de structure du groupe projectif font reprendre les notions de dérivée *extérieure* et de produit *extérieur*, notions qui jouent un grand rôle sous les intégrales multiples; si bien que toute cette géométrie différentielle peut dépendre maintenant d'un substratum intégral. C'est là l'une des idées essentielles de M. Elie Cartan avec laquelle il a renouvelé la Théorie des groupes de Sophus Lie. La Géométrie projective des surfaces (Ch. III) contient des notions telles que celle de surfaces *projectivement* applicables et ceci avec des notations étonnamment simples où les formes différentielles jouent un grand rôle; la géométrie exposée était nécessaire pour l'interprétation de toute cette analyse pfaffienne.

Soyons plus brefs quant à la Deuxième Partie consacrée aux « Espaces à connexion projective » et composée de sept chapitres. Comme nous l'avons dit plus haut, il s'agit d'étudier, avec l'instrument projectif, ce qui n'est plus forcément projectif. Des *cycles* projectifs ne se ferment plus, en général, dans un espace où n'existe qu'une connexion projective, d'où l'apparition d'une *torsion*. L'analogie avec la Géométrie riemannienne s'impose alors si bien qu'il faut construire toute une Algèbre et tout un Calcul tensoriel de nature projective. Ces constructions sont aussi maniables que celles faites dans les Espaces de Riemann et tournent à l'avantage de ces derniers espaces et de la Gravifique. L'immense valeur de ce qui s'étend si bien n'est-elle pas maintenant évidente. Les formes intégrales et les formules stokiennes réapparaissent. Mêmes remarques pour les identités de Bianchi. Extensions, de nature projective, des équations des géodésiques riemanniennes. Géométrie des surfaces plongées dans les espaces à connexion projective à trois dimensions. Et enfin groupe d'holonomie d'un espace à connexion projective, ce groupe étant, pour ainsi dire, la garantie suprême de la possibilité d'explorer tout l'espace en question, par méthode projective.

Quel éloge ajouter à un tel exposé? Bornons-nous à mentionner que la rédaction de M. Paul Vincensini est celle d'un géomètre averti, dont les travaux originaux ne sont plus à signaler et auquel M. Elie Cartan a témoigné une confiance bien méritée.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS DE BROGLIE. — **La Physique nouvelle et les Quanta** (Bibliothèque de Philosophie scientifique. Directeur: Paul Gaultier). — Un volume in-8° (19 × 12) de 308 pages. Prix: 15 francs. Ernest Flammarion, Paris, 1937.

Encore une production, de M. Louis de Broglie, où le philosophe s'égale au savant. Elle sera bienvenue, à la fois, du grand public qui veut s'éclairer et du monde scientifique, encore incomplètement renseigné, à qui l'on doit répéter inlassablement nombre de vérités élémentaires auxquelles s'attachent souvent des idées de transcendance mal situées. Certes la Physique nouvelle est plus difficile que l'ancienne, mais les quanta sont partout et ont toujours été partout, par exemple dans la notion fondamentale de nombre entier, de fonction exponentielle  $e^x$ , où  $e$  ne saurait être quelconque, et dans tous les systèmes différentiels, à propriétés groupales ou gravifiques, où certaines constantes ne peuvent varier de façon continue. Et il se trouve encore des hommes de science pour imaginer que le domaine quantique est chose abstruse, en dehors des voies connues, alors qu'il englobe ces voies.

Espérons que le présent ouvrage aidera à les détromper.

D'ailleurs M. de Broglie commence par réexaminer la Mécanique jacobienne faite à l'image des systèmes célestes. De quel droit introduire le temps *astronomique* dans l'atome ? Certes ce dernier n'est pas indépendant de considérations temporelles, mais il y a là un temps complexe, multiplement paramétrique, non conforme généralement au déterminisme vulgaire. Le temps gravitationnel en est un cas très particulier.

Les ondes et les corpuscules n'ont pas, non plus, de réalité essentielle. Tantôt le champ phénoménal se décrira en corpuscules, tantôt en ondes. Si l'on tente de préciser au profit de l'une de ces conceptions, des évanouissements et des incertitudes apparaissent du côté de l'autre. Combien il est joli, malgré cela, que les phénomènes de l'optique ondulatoire (réfraction, diffraction, ...) puissent se corpusculariser et donner ainsi naissance à cette admirable Mécanique ondulatoire qui, possédant des corpuscules, peut posséder des ondes de matière. Ici Maxwell, par ses ondes électromagnétiques, faisant maintenant fort bon ménage avec électrons et photons, joue le rôle d'un précurseur du plus grand génie.

La Théorie de la Relativité peut s'obtenir aussi par une certaine manière de compléter les équations de Maxwell (en y remplaçant les dérivées partielles ordinaires par des dérivées covariantes). Restreinte sous la forme lorentzienne, elle est nécessaire au monde des corpuscules à grandes vitesses. Généralisée, elle s'impose moins mais fournit un si magnifique monument mathématique qu'il faut étudier ce monument pour se sentir capable d'aborder d'autres théories au moins aussi audacieuses, telles celles attachées à l'équation de Schrödinger qui est, dans le monde des quanta, ce qu'était l'équation de Jacobi en Mécanique classique.

Au delà, il y a des constructions mathématiques, des équations aux dérivées partielles de tous les ordres, des équations de nature fonctionnelle très diverses qui, n'étant pas étrangères aux fronts d'ondes à émiettement possible, présagent indéfiniment des théories nouvelles nous apportant le désespoir de ne pouvoir nous les représenter toutes. Heureusement, les Mécaniques statistiques arrivent à la rescousse et nous consolent en peignant l'indéfiniment varié sous forme d'effets moyens.

Mais certaines formes théoriques sont essentiellement quantiques. L'action quantifiée de Planck est aussi certaine que la structure granulaire

des radiations lumineuses. Le continu est peut-être une pure invention humaine.

L'atome gravitationnel de Bohr était forcément imparfait, comme trop astronomique. Mais il n'en conduisit pas moins Bohr et ses élèves, notamment Heisenberg, à un « Principe de correspondance » qui, d'abord statistique, se précisa dans l'étude des raies spectrales. Pour l'atome radiant, y a-t-il meilleure image que le spectre ? On peut arriver par là à la Mécanique ondulatoire et à la Mécanique quantique de Heisenberg pour les ramener ensuite l'une à l'autre. Par les deux voies on reconnaît les mêmes incertitudes. Au delà, ce sont les systèmes de Pauli et surtout de Dirac tenant à construire une microphysique relativiste et y parvenant par l'invention d'une algèbre nouvelle. Tout cela ne se voit pas, ne se sent pas à l'échelle des sensations habituelles. La forme théorique générale est dans un espace de configuration. Les particules n'ont pas une individualité nette comme les points géométriques. On ne les suit pas plus dans un espace usuel qu'on ne raconte leur histoire dans un temps historique. Et cependant ce monde sous-jacent est encore étudié par l'intelligence humaine, intelligence dont la nature propre se trouve peut-être mieux révélée par le monde en question que celui-ci ne l'est par le plus pénétrant esprit d'analyse.

A. BUHL (Toulouse).

**Maurice FRÉCHET. — Généralités sur les Probabilités. Variables aléatoires.**

Avec une Note de Paul Lévy. Premier Livre. (Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications publié par Emile Borel, avec la collaboration de C.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, P. Dubreil, M. Fréchet, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, Ch. Risser, P. Traynard. Tome I. Fascicule III). — Un volume gr. in-8° de xvi-308 pages. Prix : 90 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

La grande œuvre de M. Emile Borel se poursuit magnifiquement avec de non moins grands collaborateurs. La concurrence de l'étranger n'est pas à craindre bien que le Calcul des Probabilités soit très travaillé hors de France. Mais nous possédons de merveilleux esprits synthétiques qui créent des formes nouvelles de la Science tout en englobant, avec une aisance sans égale, les apports les plus divers venus des sources les plus disparates. Le véritable esprit de M. Maurice Fréchet me paraît s'exercer dans le sens d'une révision des définitions fondamentales, non pas à un point de vue philosophique comportant nécessairement du vague mais au point de vue des extensions, des développements mathématiques possibles. Le protagoniste des « Espaces abstraits » semble avoir voulu en retrouver toutes les modalités dans le Calcul des Probabilités. Il y est arrivé. Son Premier Livre est un Traité d'Analyse moderne contenant les considérations fonctionnelles les plus pénétrantes et les plus délicates.

D'ailleurs, tout de suite (p. 30), une variable aléatoire est une fonctionnelle avoisinant nécessairement la « fonction de répartition » de M. von Mises ou la « fonction des probabilités totales » de M. Paul Lévy.

La définition des valeurs moyennes suppose l'introduction de l'intégrale de Stieltjes, en  $dC(x)$ , où  $C(x)$  est la fonction des probabilités totales. Mais les valeurs moyennes ne sont que des valeurs typiques susceptibles de modalités telles que la « valeur médiane » associée, en deux mots, à la notion d'approximation pouvant avoir lieu aussi bien par défaut que par excès.

Il a fallu disséquer l'intégrale de Stieltjes, y reconnaître trois parties, dont une à la Lebesgue; plus loin, dans une généralisation concernant la valeur moyenne du produit de deux variables aléatoires, nous retrouvons l'inégalité de Schwarz préfaçant plus ordinairement certains raisonnements des Théories quantiques. D'ailleurs, si le Calcul des Probabilités conduit précisément, au point de vue physique, aux théories quantiques, on observe aussi, et précisément en étudiant M. Fréchet, que ce Calcul a souvent une structure mathématique interne qui est de nature quantique, les cas ne relevant que de l'ordinaire continuité devenant de plus en plus exceptionnels.

Une autre remarque, fort importante, est que beaucoup de nouveautés probabilitaires pourraient être greffées sur des conceptions existant, en germe, dans le Traité de Laplace. Cet illustre prédécesseur a dû se rendre compte de profondes transformations réservées à l'Analyse; s'il ne les a point explicitées, c'est évidemment de par la limitation des forces individuelles surtout à une époque donnée et même quand ces forces relèvent du génie.

C'est encore un des nombreux mérites de M. Fréchet que de remonter jusqu'à Laplace.

Observation analogue quant aux travaux très peu connus de Bienaymé. Il y a là une formule majorante très simple quant à une probabilité indépendante de la loi à laquelle obéit une variable aléatoire. D'où des conséquences de Tchebicheff relatives au Théorème de Bernoulli et diverses généralisations qui laissent cependant un avantage particulièrement net à la formule de Bienaymé. A ce propos, digressions remarquables sur les formules qui sont « les plus avantageuses de leur espèce ».

Les divers modes de convergence d'une suite de variables aléatoires se rattachent encore à une idée de Laplace. Il y a une convergence « en probabilité », selon M. Cantelli, qui correspond à une convergence « en mesure » et à la notion, due à M. Lebesgue, de fonctions égales « presque partout ».

Maintenant voici un « Premier espace de variables aléatoires ». Il est distancié. Il me semble y percevoir de curieuses analogies avec les espaces de groupes de M. Elie Cartan. En tout cas, c'est également beau. Et divers espaces correspondent à diverses natures de convergence.

Je crois en avoir assez dit pour éveiller le plus vif des intérêts. Diverses Notes terminent l'ouvrage. Celle de M. Paul Lévy est relative à la distance de deux « lois ».

Parmi les modernes dont les œuvres sont si bien amalgamées, citons Banach, Bernstein, Borel, Camp, Cantelli, Castelnuovo, Cramer, Frisch, Glivenko, Hausdorff, Ch. Jordan, Kamke, Khintchine, Kolmogoroff, Kuratowski, von Mises, Karl Pearson, Slutsky, Steinhaus, Wilson. Quelques idées de Cournot sont plus anciennes mais ne gâtent rien.

Concluons, sans longueur, que ce livre est un véritable prodige.

A. BUHL (Toulouse).

Vito VOLTERRA et Joseph PÉRÈS. — **Théorie générale des Fonctionnelles.**

Tome premier. Généralités sur les Fonctionnelles. Théorie des Equations intégrales (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la Direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de XII-360 pages. Prix: 100 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Voici la seconde édition des *Leçons sur les Equations intégrales et intégral-différentielles* publiées en 1913 (voir *L'Enseignement mathématique*,

15, 1913, p. 447). Mais avec quels développements ! Ceux-ci paraîtront plus étendus encore si l'on songe que le volume primitif, de 164 pages, doit donner non seulement les 360 présentes pages mais encore deux autres tomes dont les sous-titres seront, pour l'un: *Composition, Equations intégrro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles, Généralisations des Fonctions analytiques*, pour l'autre: *Compléments et Applications*.

Ce seul projet, dont le premier tiers est maintenant réalisé, donne, grâce aussi aux noms des auteurs, une impression de magnificence qui rend assez vaine toute appréciation écourtée. De plus des œuvres comme celle-ci et comme celle de M. Fréchet ont, malgré la différence des notations et du style, une analogie profonde peignant admirablement la pensée mathématique moderne créant ses espaces abstraits ou fonctionnels pour se manifester. Eddington a écrit que plus il y avait de matière — au sens physique du mot — plus il se faisait d'espace pour la contenir. Or ceci est vrai de la matière mathématique, voire philosophique. Plus il s'en crée, plus on éprouve le besoin de la *situer* et c'est pour cela que les espaces s'amplifient en prenant des structures de plus en plus diverses, de plus en plus subtiles.

D'ailleurs, dans les premières pages du livre, la notion de fonctionnelle est mise en relation avec celle d'hyperespace. Puis vient la notion de champ fonctionnel. Une fonctionnelle doit-elle être rapprochée d'une fonction d'une infinité *dénombrable* de variables ou d'une fonction d'une infinité *continue* de variables, la question pouvant se généraliser en allant chercher des infinités à puissance supérieure à celle du continu ? M. Volterra répond, avec une magnifique audace, que le véritable Calcul fonctionnel est *capable* de toute théorie de ce genre actuellement établie ou à venir.

A propos du recours aux ensembles abstraits, M. Fréchet est signalé sans délai. C'est en plein accord avec lui que l'on traite de la continuité des fonctionnelles, continuité à coup sûr non obligatoire et souvent éclairée par la notion de semi-continuité. Puis les fonctionnelles ont des types simples, particulièrement le type linéaire, générateur d'équations intégrales à intégrales simples, cependant que des fonctionnelles d'ordre  $n$  donnent des constructions à intégrales multiples d'ordre  $n$ . Ces considérations utilisent des intégrales à la Stieltjes, terrain à peine connu quand il s'agit d'intégrales multiples.

Quant aux dérivées fonctionnelles, ce sont des extensions si naturelles qu'elles peuvent aboutir à une formule de Taylor généralisée. Signalons aussi les différentielles de M. Fréchet où la différence entre  $y + \delta y$  et  $y$  est une distance dans l'espace fonctionnel. Le Calcul des variations n'est qu'un chapitre de la théorie générale des fonctionnelles. Les problèmes aux limites de la Physique font précisément intervenir des variétés limites comme variables fonctionnelles. On sait aussi les insuffisances des méthodes, de Riemann et de Dirichlet, appuyées sur des extréma intégraux. Leur constatation a renouvelé la Science et pouvait, à elle seule, faire reviser la notion de continuité.

Tout ceci n'est que le Livre I. La « Théorie des Equations intégrales » forme le Livre II. Nous nous permettons d'être plus bref, ce qui précède répondant suffisamment pour ce qui suit. C'est ici qu'interviennent les différents types d'équations de Volterra, types qui précèdent logiquement l'équation de Fredholm. Les germes de tels développements sont à rechercher dans un passé parfois assez lointain. Abel et Liouville furent des pré-

courseurs. Le regretté Lalesco signala des particularités à rôle fondamental. Henri Poincaré adopta la méthode de Fredholm dans sa Théorie des Marées. M. Emile Picard rattacha de tels sujets à ses méthodes d'approximations successives. La synthèse de tous ces résultats est un splendide monument d'Analyse.

Aux auteurs déjà cités, ajoutons Arzelà, Baire, Borel, Carleman, Cauchy, Euler, Fantappié, Fourier, Gateaux, Giraud, Hadamard, Heisenberg, Hilbert, Leray, Levi-Civita, Paul Lévy, Riesz, Schmidt, Stokes, Tamarkin, Taylor, Tonelli, Villat, Weierstrass. N'oublions pas le rôle essentiel de M. Joseph Pérès.

Sera-t-il possible de s'émerveiller davantage quand nous aurons, au grand complet, les trois volumes promis ?  
A. BUHL (Toulouse).

Joseph PÉRÈS. — **Cours de Mécanique des Fluides** (Fluides parfaits. Aile portante. Résistance.) Publié avec la collaboration de L. Malavard, Ingénieur civil de l'Aéronautique. Préface de M. Henri Villat. — Un volume gr. in-8° de VII-322 pages. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

N'ai-je pas été un peu oublieux, à l'égard de M. Joseph Pérès, en analysant l'ouvrage précédent ? Toutefois, un jeune savant comme lui n'a rien à craindre; par la force des choses, il ne permet pas qu'on l'oublie. Voici, de lui, une œuvre nouvelle et remarquable, au moins, à deux points de vue. D'abord c'est le Cours théorique sur les fluides qui existe maintenant dans la plupart des Universités françaises, Cours fondé par le Ministère de l'Air en vue de l'aviation et qui correspond au Certificat d'Etudes supérieures de Mécanique des Fluides mais qui, à ma connaissance, n'avait jamais jusqu'ici été rédigé et publié. Ensuite, ce Cours que l'on aurait pu croire d'allure très spéciale et destiné très particulièrement aux constructeurs d'avions, est vraiment un exposé élémentaire de l'hydro et de l'aérodynamique avec élégants emprunts aux fonctions analytiques ainsi qu'aux notions vectorielles et tourbillonnaires les plus simples.

C'est, en somme, le problème du courant fluide autour d'un obstacle fixe qui est retourné en faisant mouvoir l'obstacle, devenu avion, dans une masse aériforme indéfinie et primitivement en repos. Le paradoxe de D'Alembert et d'autres, étudiés notamment par M. Villat, n'empêchent pas l'avion de voler. Quelle merveilleuse incitation à ne pas considérer la science dont il s'agit comme bloquée par des paradoxes.

Vraiment toute la Mécanique des fluides et passée en revue. Un courant fluide autour d'un obstacle peut d'abord être considéré comme irrotationnel mais les tourbillons peuvent apparaître ensuite, comme des manifestations analytiques de méromorphie, non seulement dans le voisinage dudit obstacle mais, pour ainsi dire, dans l'obstacle même qui prend figure de masse tourbillonnaire. C'est la Théorie de Prandtl. Ainsi, même s'il n'existait jamais d'obstacles solides dans les fluides, ceux-ci pourraient en engendrer sous forme d'agrégats tourbillonnaires qui résisteraient au mouvement général. Le solide n'est donc pas toujours un intrus. Voilà, n'est-il pas vrai, une belle et philosophique conception bien que M. Pérès ait négligé de parler explicitement de philosophie. Mais vraiment la chose y est tout de même et le livre pourra intéresser les purs théoriciens qui s'étonneront, sans doute, de la facilité avec laquelle on trouve de jolies constructions

mathématiques dans le domaine, à réputation d'aridité, des équations d'Euler.

Il faut noter aussi que ce sont les avions à théorie élémentaire, tels les biplans, qui ont triomphé le plus facilement en pratique. Il y a des profils Joukowsky qui dérivent tous d'une même transformation conforme et des intégrales de Blasius qui s'adaptent à la réalité d'une manière fort curieuse, allant même jusqu'à cesser d'avoir un sens quand on veut prendre les choses de manière par trop schématique.

Si bien que l'avion apparaît maintenant comme la création toute naturelle de quelque génie de l'air tout naturellement mathématicien. Nous sommes finalement loin d'une théorie de perturbations bien qu'à certains points de vue, la chose aient l'air de commencer ainsi. Peut-être que, dans l'avenir, nous arriverons à voler à beaucoup moins de frais encore et avec l'impression que nous sommes des êtres aériformes qui se sont longtemps ignorés.

On voit l'intérêt des idées soulevées par le si clair exposé de M. Pérès. Ce dernier a été secondé par M. L. Malavard qui a même exposé, à la fin du volume, une « Méthode électrique pour le Calcul des ailes d'envergure finie ». Un montage électrique résout très élégamment la question. Ce n'est pas étonnant au point de vue des généralités hydrodynamiques et électrodynamiques qui reposent sur les mêmes considérations vectorielles ou tensorielles mais il s'agit ici d'un problème précis qui aurait pu être malaisé à insérer dans les généralités théoriques. Au contraire, l'appareil calculateur d'ailes, de M. Malavard, donne des résultats excellents même dans les « structures fines » où les paramètres varient très vite (bouts d'aile, raccords, etc.). Et quelle autre chose curieuse que d'avoir à évoquer ces microstructures, c'est-à-dire un terme de Mécanique quantique ou ondulatoire qui, à vrai dire, s'est introduit en Analyse pure. Il faut en conclure, une fois de plus, que les fluides contiennent nombre de subtilités que des disciplines récentes rapportent au domaine atomique ou intra-atomique.

A. BUHL (Toulouse)

Gaston JULIA. — **Éléments de Géométrie infinitésimale**. Deuxième édition.

— Un volume gr. in-8° de VIII-262 pages et 16 figures. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

La première édition de ce bel ouvrage a été analysée dans *L'Enseignement mathématique* de 1927 (26, p. 169). Une seconde édition en moins de dix ans ! Voilà qui est fort beau et qui pourrait dispenser d'une nouvelle analyse bibliographique. Mais M. Julia a refondu son livre en y mettant une homogénéité pleine d'un intérêt très actuel.

C'est d'abord la Théorie du contact ou l'analyticité et la non-analyticité voisinent sans se heurter le moins du monde. Il s'agit d'égalités entre dérivations poursuivies jusqu'à un ordre  $n$ . On peut supposer néanmoins les dérivations indéfiniment possibles; c'est le cas analytique. Plus subtil est le cas mixte où l'une des variétés en contact est analytique sans que l'autre le soit. On pourrait partir de là pour rebâtir de nombreuses méthodes d'approximation analytiques pour fonctions simplement réelles. Et bien que l'auteur ne se soit pas proposé d'aller jusque là, il me semble qu'il a songé à préparer de telles questions. Les enveloppes ont, de même, des

singularités caractéristiques que nombre de développements, sur les dérivations conditionnelles, ne font plus que paraphraser.

Plus loin, à côté de l'archaïque surface réglée non développable, l'apparition de la développable non réglée. Ce peut être très simple. Quoiqu'il en soit, nous avons fait du chemin depuis 1899, époque où M. Henri Lebesgue risqua d'attirer sur lui toutes les foudres du ciel géométrique d'alors.

Les propriétés intrinsèques d'une courbe, les formules de Frenet-Serret empruntent une grande simplicité à la notation vectorielle.

La congruence des normales à une courbe gauche conduit immédiatement aux développées situées sur la surface polaire et à la rectification particulièrement simple de ces courbes.

Pour les surfaces, inutile de chercher mieux, dans le voisinage d'un point, que la bonne et vieille indicatrice de Dupin. De même le trièdre de Darboux-Ribaucour conduit aisément à des considérations dues à Ossian Bonnet. Double préparation, d'une part à la Théorie des groupes, de l'autre aux géométries géodésiques ou non-euclidiennes. Tout ceci en coordonnées curvilignes quelconques et toujours avec l'appui, plus ou moins explicite, du Calcul vectoriel, donne un exposé d'une parfaite symétrie.

Lignes de courbure avec élégant aboutissement à la cyclide de Dupin. Lignes conjuguées, lignes asymptotiques et circonstances analytico-géométriques singulières, formule d'Enneper et transformations de Lie. Avec cela, on peut aller loin.

Une section bien intéressante est consacrée aux congruences rectilignes, particulièrement aux congruences de normales. Le sujet, depuis une vingtaine d'années, a donné une foule de travaux dont certains fort exotiques. L'espace réglé semble particulièrement international. M. Julia ne le néglige pas. Il termine, en beauté, avec les représentations conformes et questions connexes, questions auxquelles il a consacré plusieurs volumes au point de vue spécialement analytique. Les élèves qu'il formera, à la suite de tant d'autres déjà formés, sauront relier les différentes parties d'une œuvre pédagogique qui devient gigantesque. A. BUHL (Toulouse).

G. JULIA. — **Cours de Cinématique** rédigé par Jean Dieudonné. Deuxième édition. — Un volume in-8° (23 × 14) de VIII-162 pages et 52 figures. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1936.

Mêmes réflexions que pour le volume précédent. Analyse, dans *L'Enseignement mathématique*, il y a aussi dix ans (*loc. cit.*, p. 337). Et réfection de l'édition avec aperçus vers les problèmes analytiques ou géométriques modernes. Seulement, cette fois, c'est M. Julia, lui-même, qui annonce la chose. Un esprit aussi pénétrant aurait-il pu faire autrement. Je me rappelle d'ailleurs ma jeunesse, époque où il y avait deux grands volumes de *Cinématique* dus à Henri Poincaré et à Gabriel Kœnigs. Je ne mentionnerai que pour mémoire l'admirable *Géométrie cinématique* exposée par Amédée Mannheim, car ceci nous éloignerait du sujet. Or, M. Julia se rapproche de Poincaré.

Les notations vectorielles ont beau jeu. La symétrie est parfaite. Le Calcul vectoriel est souvent repris à partir des origines qu'il trouve en Géométrie infinitésimale. Éléments de la Théorie du trièdre mobile toujours suivant Darboux. Beaucoup de géométrie à propos de la formule d'Euler-Savary, dans le genre épicycloïdal qui permettrait d'aller vers Mannheim.

Le livre se termine avec le commencement des généralités réglées et les mouvements du trièdre de Frenet.

Au total intéressant et suggestif complément pour les *Éléments de Géométrie infinitésimale*. Mais les lecteurs s'en sont sans doute aperçu tout seuls puisque les deux premières éditions ont été épuisées ensemble.

A. BUHL (Toulouse).

A. BUHL. — **Nouveaux Éléments d'Analyse**. Calcul infinitésimal, Géométrie, Physique théorique. Tome I. — Un volume gr. in-8° de VIII-204 pages et 26 figures. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Éléments nouveaux, en effet, où M. Buhl se propose d'associer, aux Principes de l'Analyse, les Principes de la Physique théorique aussi bien que ceux de la Géométrie. C'est naturel. La Géométrie est science de mesure et il n'y a vraiment Physique que là où l'on peut faire des mesures ou, tout au moins, espérer en faire.

Les mesures *infinitésimales* ne vont pas (Ch. I) sans *microstructures*. On trouve celles-ci dans la représentation de la mesure des ensembles, sous les incertitudes de Heisenberg, dans les surfaces développables *non réglées*, dans les constructions du Calcul intégral sous leur forme la plus archaïque, dans les chemins *nuls* parce que formés d'éléments isotropes, dans les milieux modifiés par les mesures mêmes. Et ainsi de suite. La notion n'avait nullement à être créée; elle avait surtout besoin d'être franchement explicitée.

Un Chapitre II est consacré aux formes différentielles, aux transformations intégrales, aux formules stokiennes, plus précisément aux intégrales généralement multiples qui restent invariantes lorsqu'on déforme les champs d'intégration. Les intégrales des systèmes différentiels étant associées à ces considérations et ces intégrales restant constantes en vertu des systèmes différentiels considérés, on est en présence de deux grandes invariances fondamentales qui sont, au premier chef, objet de science, au milieu des variabilités inextricables du monde phénoménal. Ici notons des novations hardies dans le domaine de l'enseignement élémentaire de l'Analyse. Produits *extérieurs* pour les éléments différentiels engagés sous des intégrales multiples. Identités intégrales fondamentales

$$\int_C X dY = \int_A \int dX dY, \quad \int_S \int X dY dZ = \int_V \int \int dX dY dZ, \dots ;$$

leurs rapports avec les équations différentielles, les ondes (différentielles, intégrales, manifestement ondulées, ...), les *espaces à canaux* à propagation transversale ondulatoire ou corpusculaire. Equations de Monge-Ampère. Equations canoniques. Equations de Maxwell. Equation de D'Alembert.

Le Chapitre III a trait aux Fonctions de lignes, fonctions relativement simples où la variable est un ensemble continu de points. C'est là que l'on peut saisir en détail de très élégantes propagations d'aires. La plus simple est vraisemblablement celle d'Archimède qui détache de la surface de la sphère des aires infinitésimales, lesquelles, par propagation conoïdale, vont s'appliquer sur le cylindre circonscrit.

D'autres sont plus complexes quoique toujours élémentaires. Ainsi il y a

une planification des aires ellipsoïdales, par nappe d'onde ou par corpuscules, qui se ramène à une quadrature circulaire. Toute cette belle géométrie exigerait des détails qui malheureusement déborderaient le cadre de cet article.

La Théorie des surfaces (Ch. IV) est surtout originale par la prompte obtention des formules d'Ossian Bonnet, de Gauss, d'Albert Girard (Cf. LEBESGUE, *Ens. math.*, **33**, 1934, p. 197) d'où ouverture également très rapide sur la Géométrie non-euclidienne.

Le Chapitre V prépare les transformations, les groupes, en commençant par les groupes linéaires, c'est-à-dire par les matrices. Les groupes de Lie sont présentés, d'une part, par les opérateurs (non permutables) de leurs transformations infinitésimales, d'autre part, par les formes de Pfaff (à multiplication extérieure) qui président, conformément aux vues de M. Elie Cartan, à la génération des espaces paramétriques du groupe.

Des notions de Calcul différentiel absolu occupent le Chapitre VI. La dérivation covariante, avec sa non-permutabilité d'où provient la courbure d'un Espace de Riemann, conduit droit à la Gravifique d'Einstein d'ailleurs appuyée sur l'analyse à la Maxwell du Chapitre II.

Le Chapitre VII est consacré aux Equations canoniques. Nouvelle réunion du point de vue dynamique et du point de vue géométrique puisque ces équations canoniques président à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Il faut encore remarquer que tout ceci, ne serait-ce que pour de simples descriptions, demanderait des développements impossibles à donner dans un compte rendu bibliographique. Mais nous pouvons renvoyer à l'article *Espaces fibrés, Groupes, Quanta*, publié en ce même fascicule et où M. Buhl donne précisément d'intéressants aperçus sur des points traités, en son Tome I, de manière particulièrement originale.

Espérons que l'effort de l'auteur contribuera à répandre des méthodes d'enseignement employées depuis longtemps dans des Cours fort classiques.

H. FEHR.

J.-B. TOURRIOL. — **Electricité** (Classes de Mathématiques spéciales). — Un volume gr. in-8° de 320 pages et 302 figures. Prix: 65 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Il y a là un troisième volume qui continue un grand Cours de Physique pour Classes de Mathématiques spéciales. L'auteur a commencé par l'Optique géométrique (voir *L'Ens. mathématique*, **33**, 1934, p. 123) et par la Chaleur (*loc. cit.*, **34**, 1935, p. 133). Voici l'Electricité. C'est un véritable tour de force que de traiter un pareil sujet sans intégrales invariantes, sans formules stokiennes, en ne parlant des conceptions fondamentales de Maxwell qu'à la fin du livre. Est-il nécessaire de bâtir une science artificielle pour jeunes gens dont les moins doués croiront que c'est la véritable science. Je ne sais.

S'appuyer sur les Mathématiques que je juge vraiment adéquates aux Théories électro-magnétiques me semble d'une excessive simplicité. Les intégrales multiples ne sont que joujoux à multiplication *extérieure* plus maniable que la multiplication ordinaire.

Et cependant, pour introduire ces joujoux en Spéciales, il faudrait de tels bouleversements que j'hésiterais à accepter de les diriger. Je ne sais si

M. Tourriol pense comme moi mais cela n'a rien d'impossible. Et, dans les conditions où il se trouve placé, j'admire sa plasticité d'esprit et même le grand talent qu'il a dû dépenser pour respecter le cadre imposé par les programmes.

Au début remarquons des élégances qui pourraient être conservées. Il s'agit d'actions à distance considérées comme newtoniennes. Théorème de Gauss. Champs nuls. Rapide aperçu (très bien) sur la théorie électronique. Potentiels.

L'électrostatique est tout de même maxwellienne quant au rôle, non inerte, des diélectriques.

Le magnétisme isolé a quelque chose de particulièrement artificiel au point de vue théorique.

Mais les aimants donnent toute une belle géométrie. Les boussoles sont souvent des merveilles de construction; elles donnent des *cartes*. Là encore l'auteur s'est admirablement tiré d'affaire.

Et l'électrodynamique, avec les phénomènes électrolytiques, avec les résistances thermiques, prépare toute une science technique au-dessus de laquelle beaucoup d'ingénieurs ne s'élèveront pas.

C'est surtout l'Electromagnétisme qui aurait besoin d'une analyse qui n'est pas à la disposition de l'auteur ce que, encore une fois, il doit regretter plus que moi. Mais il éveille néanmoins beaucoup d'intérêt par la description schématique d'expériences aussi nombreuses que captivantes. Maxwell, ce dieu, suivant l'expression de Boltzmann, termine en beauté avec les deux systèmes d'unités et le fameux rapport égal à  $c$  vitesse de la lumière. Au delà ce seraient les ondes électromagnétiques par lesquelles le Créateur commença l'Univers. Nos théories modernes commencent aussi par là, c'est-à-dire avec une électricité sans support matériel. Mais M. Tourriol n'empêchera personne d'aboutir à de telles conceptions structurales. Il aura, au contraire, préparé le terrain en respectant la pédagogie actuelle, ce qui n'est pas un mince mérite, et comme un Professeur de cette envergure finira bien — et sans doute bientôt — par acquérir quelque rôle directeur important, il pourra alors songer à modifier des programmes d'abord observés en toute conscience.

A. BUHL (Toulouse).

Th. LECONTE et R. DELTHEIL. — **Préparation à l'Etude des Probabilités.** —

Un volume in-8° de VIII-168 pages et 22 figures. Prix: 20 francs. Vuibert, Paris, 1937.

Tentative intéressante et de cachet bien moderne. Pour véritablement approfondir le Calcul des Probabilités, il faut avoir recours aux régions élevées des Mathématiques. Mais il en est exactement de même s'il s'agit d'approfondir l'Algèbre ou la Géométrie. Et cependant il y a une algèbre et une géométrie élémentaires, enseignées à de jeunes élèves. Pourquoi n'y aurait-il pas, de même, une étude élémentaire des Probabilités qui, dans l'Enseignement secondaire, pourrait permettre des applications fort intéressantes de l'algèbre et de la géométrie tout en éveillant ce sens du hasard étudié, cette notion d'équité et d'espérance raisonnée qui caractérisent les doctrines systématiques des chances.

Un peu d'histoire nous montre qu'à cet égard il ne faudrait pas tomber dans les outrances de Condorcet mais nous avons aujourd'hui les moyens d'éviter toute situation outrancière.

Les premières pages du livre font d'ailleurs faire une réflexion des plus importantes. Les théories en litige pourraient être, à coup sûr, une façon d'aborder les considérations discontinues, dénombrables de l'Analyse combinatoire mais il est plus simple dans beaucoup de cas (comme dans le jeu du franc carreau) de traiter tout de suite de probabilités continues qui n'exigent que des comparaisons d'aires ou de continus mesurables. Quant à la notion d'équité, elle ne va pas sans paradoxes tels que le célèbre Paradoxe de Saint-Pétersbourg. Quel beau sujet de dissertation pour les élèves philosophes.

Ainsi lancés dans la carrière, les auteurs ont pu aborder très simplement les règles fondamentales, jusqu'à la Loi des grands Nombres, jusqu'à la courbe en cloche de Laplace et de Gauss d'abord approchée par d'ingénieux tracés polygonaux.

Les notions statistiques, notamment la corrélation, apparaissent avec une facilité inattendue, et les Théories physiques modernes, bien que réduites à quelques pages terminales, ne jouent pas le rôle le moins important pour faire comprendre la nécessité de la discipline probabilitaire.

Il ne s'agit nullement de charger des programmes déjà très lourds. Mais, dans les mains de professeurs intelligents, ce livre permettrait d'introduire, dans les cours existants, une variété pleine d'intérêt et de sens critique.

A. BUHL (Toulouse).

F. GONSETH. — **Les Mathématiques et la Réalité.** Essai sur la méthode axiomatique. (Bibliothèque de Philosophie contemporaine). — Un vol. in-8° de xi-386 pages; broché, 30 fr.; Librairie Félix Alcan, Paris, 1936.

Les ouvrages philosophiques de M. Gonseth — ce livre constitue la suite et le complément des pages que la critique a si favorablement accueillies sur « Les Fondements des Mathématiques » — ont une double saveur pour quiconque s'intéresse au développement et au mécanisme de la pensée mathématique. En premier lieu, ils ont la fraîcheur que donne la réinvention toute personnelle des problèmes épistémologiques: M. Gonseth n'est pas parti de la lecture des Brunschvicg, des P. Boutroux, des Russell, des Husserl ou des Meyerson pour analyser à son tour l'état actuel de la pensée logico-mathématique, il s'est au contraire volontairement borné, d'abord, à un approfondissement des questions que posait à son esprit critique le maniement quotidien de la science même, et cette réflexion s'est ensuite étendue au point de rencontrer, mais avec une vision toute neuve et individuelle, celle de tous les grands auteurs contemporains. A cet égard, les discussions consacrées par M. Gonseth à la construction de la réalité, aux relations indissociables de l'intuition avec le schématisme logique, tous deux en œuvre dans cette construction, aux structures rationnelles et à la nature de l'explication, sont d'un haut intérêt et définissent une position qui semble inattaquable, à mi-chemin entre le logicisme et l'empirisme, et conciliant les droits de l'axiomatique avec ceux du réel au moyen d'une conception très psychologique de la logique elle-même.

En effet, et cette seconde qualité de l'ouvrage ne fait qu'un avec la première, M. Gonseth, par sa volonté même de voir par ses propres yeux et d'écarter toute théorie, aboutit en réalité à un point de vue psychologique beaucoup plus que formel, prolongeant ainsi la grande tradition d'Henri Poincaré. La logique, telle que la conçoit Gonseth, cette « phy-

sique de l'objet quelconque », c'est réellement l'analyse de la pensée telle qu'elle est et non pas une axiomatique détachée du fonctionnement psychologique. Bien plus, l'ouvrage entier fourmille d'exemples (à propos de la nature du nombre, des liaisons logiques élémentaires, de la genèse des groupes spatiaux, des types, etc.) d'analyses psychologiques très fines et d'esquisses ingénieuses.

En bref, un tel ouvrage ne se résume pas. Sa valeur en est tout entière dans l'attitude de l'auteur, dans ce mélange de probité, d'effort individuel et de sens du concret, mélange que le lecteur savoure à chaque page.

Jean PIAGET (Genève).

G. TIERCY. — **L'Équilibre radiatif dans les étoiles.** Astrophysique théorique. — Un vol. gr. in-8° de 461 pages; 100 fr.; Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, Paris, 1935.

Ces chapitres d'Astrophysique théorique correspondent, avec quelques développements, aux leçons professées par l'auteur à l'Université de Genève pendant les années 1933 et 1934. Depuis le début du XX<sup>me</sup> siècle d'importants progrès ont été réalisés dans l'étude de l'équilibre radiatif dans les étoiles, notamment par Emden, Bialobrzewski, Eddington, Jeans, Milne. De son côté, M. Tiercy a effectué et dirigé de nombreuses recherches à l'Observatoire de Genève; elles comprennent quelques calculs sur le problème des étoiles variables, des considérations nouvelles sur l'index de couleur et sur les récepteurs d'énergie rayonnante. L'auteur a également incorporé à cet exposé quelques formules modifiées sur la théorie générale de l'équilibre radiatif et des remarques sur la question des durées nécessaires aux besoins de l'Astrophysique et de la Géophysique.

C'est le regretté Gustave JUVET, professeur à l'Université de Lausanne, enlevé prématurément à la science en avril 1936, qui avait accepté de faire l'analyse de cet Ouvrage. Nous devons nous borner à reproduire ici deux passages de la lettre qu'il adressa à M. Tiercy après la réception du volume.

« Vous venez de rendre, en publiant ce traité, un immense service à ceux qui, n'ayant pas le temps de se mettre à apprendre l'anglais, soupiraient après un bon ouvrage, bien clair, complet tant que faire se peut, dans lequel ils eussent eu la possibilité d'apprendre quelque chose de ces nouvelles théories dont les Allemands et les Anglais connaissent depuis longtemps les détails, grâce aux traités d'Eddington parus dans les deux langues.

« Je vous félicite des résultats que vous avez su obtenir et que les praticiens jugeront mieux que je ne puis le faire; mais, ce dont je vous félicite en toute connaissance de cause, c'est de la belle clarté que vous avez mise dans l'exposé d'une science — la Thermodynamique stellaire — qui n'est pas médiocrement difficile et dont la partie abstraite n'a de sens que pour autant qu'il est possible à chaque étage d'en voir la signification concrète. Je suis heureux que ce traité en langue française soit écrit par un savant de mon pays. »

G. LORIA. — **Scritti, Conferenze, Discorsi sulla Storia delle Matematiche** raccolti per iniziativa e pubblicati sotto gli auspici della Sezione Ligure della Società « Mathesis ». — Un vol. in-8° de 589 pages, avec un portrait de l'auteur; 70 L.; Edit. A. Milani, Padoue, 1937.

La Section Ligure de la Société italienne des Sciences physiques et

mathématiques « *Mathesis* » a rendu hommage aux mérites scientifiques de M. Gino Loria, professeur à l'Université de Gênes, en réunissant en un volume les principaux travaux que le savant géomètre a publiés dans le domaine de l'histoire des mathématiques. Le volume a été remis au jubilaire en une séance solennelle qui a eu lieu à l'Université de Gênes le 26 novembre 1936. Il comprend un choix de trente-deux mémoires, discours et conférences sur l'histoire des mathématiques. On relira avec intérêt les belles notices consacrées à quelques grands géomètres tels que Beltrami, de Jonquières, Cremona, Mannheim, Segre, ainsi qu'aux historiens M. Cantor, Zeuthen et Paul Tannery.

L'ouvrage se termine par une liste, arrêtée fin 1936, des publications du professeur Loria. Elle ne comprend pas moins de 278 titres au nombre desquels figurent ses remarquables recherches sur les courbes algébriques et transcendentes.

H. FEHR.

**Enciclopedia delle Matematiche Elementari**, a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI et D. GIGLI. Vol. II, Parte I. — Un vol. gr. in-8° de 634 p.; 75 L.; Ulrico Hoepli, Milan, 1937.

Le but de cette Encyclopédie est de présenter, sous une forme concise et dans leurs éléments essentiels, les principales théories des mathématiques élémentaires et de leurs applications. Le Tome I, comprenant l'Arithmétique, l'Algèbre et les premiers éléments d'Analyse, a fait l'objet de deux volumes parus en 1931 et 1932. La publication du Tome II, consacré à la Géométrie, a subi des retards dus à des décès survenus dans le Comité directeur et dans le groupe des collaborateurs.

Voici la liste des monographies réunies dans cette première partie du Tome II:

P. BENEDETTI: *Fondamenti di Geometria*. — E. ARTOM: *Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio*. — D. GIGLI et L. BRUSOTTI: *Teoria della misura*. — V. RETALI et G. BIGGIOGERO: *La geometria del triangolo*. — G. BIGGIOGERO: *La Geometria del tetraedro*. — L. BRUSOTTI: *Poligoni e poliedri*. — B. COLOMBO: *Sistemi lineari di cerchi e di sfere*. — U. CASSINA: *Trasformazioni geometriche elementari*. — A. AGOSTINI: *I problemi geometrici elementari e i problemi classici*. — ID.: *Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. Trigonometria piana e sferica*.

Accompagnée de nombreuses références bibliographiques, cette Encyclopédie constitue un précieux instrument de travail pour tous les professeurs de l'enseignement secondaire et supérieur. Elle mérite de trouver place dans toutes les bibliothèques mathématiques.

H. FEHR.

J. TROPFKE. — **Geschichte der Elementar-Mathematik** in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Dritter Band: *Proportionen, Gleichungen*. Dritte, verb. u. verm. Auflage. — Un vol. in-8° de 239 pages; broché, RM. 10; Walter de Gruyter & Co, Berlin et Leipzig, 1937.

A son tour, le tome III de l'Histoire des Mathématiques élémentaires de M. Tropfke paraît en troisième édition, revue et augmentée. Il est consacré aux proportions et aux équations algébriques envisagées dans leur développement historique. Les chapitres relatifs aux équations

occupent la plus grande partie du volume. Ils débutent par les premiers essais attestés par la Papyrus Rhind et montrent quels sont les efforts accomplis à travers le moyen âge jusqu'aux temps actuels.

L'auteur attache un soin tout particulier à la terminologie et aux notations. Son Histoire des Mathématiques élémentaires constitue une mine très précieuse pour tous ceux qui désirent introduire dans leur enseignement quelques aperçus d'ordre historique.

H. FEHR.

K. KNOPP. — **Elemente der Funktionentheorie** (Sammlung Göschen, Bd. 1109). — Un vol. in-16 de 144 pages et 23 figures; relié toile; RM. 1,62.

K. KNOPP. — **Funktionentheorie. I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen** (Sammlung Göschen, Bd. 668). — Un vol. in-16 de 136 pages et 8 figures; relié toile; RM. 1,62; Walter de Gruyter & Co, Berlin et Leipzig, 1937.

Le volume sur les éléments de la Théorie des fonctions vient combler une lacune dans la série des monographies de la Collection Göschen. Il est destiné à fournir au lecteur un exposé suffisamment complet des premières notions relatives aux nombres complexes et aux fonctions d'une variable complexe.

Après avoir examiné les opérations sur les nombres complexes et les interprétations fournies par le plan complexe, la projection stéréographique et la sphère de Riemann, l'auteur étudie la fonction linéaire. Il montre ensuite comment les notions d'ensembles, de suites infinies et de séries peuvent être étendues au domaine complexe. Puis viennent les premières notions relatives aux fonctions d'une variable complexe et la représentation conforme. Dans cette première introduction l'auteur se borne aux fonctions dites élémentaires, c'est-à-dire à la fonction linéaire, aux fonctions exponentielles et logarithmiques, aux fonctions circulaires et hyperboliques et à leur inversion.

Une fois en possession de ces éléments, l'étudiant abordera sans peine l'étude de la Théorie générale des fonctions qui fait l'objet de deux petits volumes intitulés « Funktionentheorie » I et II. La première partie, dont voici la cinquième édition, a subi d'importantes transformations et additions à la suite de l'introduction du nouveau volume ci-dessus. Elle comprend les notions fondamentales de la Théorie des fonctions analytiques d'après Cauchy: extension de la notion d'intégrale; intégrale de Cauchy; séries de Taylor et de Laurent; prolongement analytique.

Ces deux petits volumes contribueront à leur tour à maintenir le succès de la Collection Göschen.

H. FEHR.

L. BIEBERBACH. — **Einführung in die konforme Abbildung. Dritte Auflage** (Sammlung Göschen, Bd. 768). — Un vol. in-16 de 137 p. avec 42 fig.; relié toile, RM. 1,62; Walter de Gruyter & Co, Berlin et Leipzig, 1937.

L'introduction à la théorie de la représentation conforme, rédigée par M. Bieberbach pour la Collection Göschen, vient de paraître en troisième édition revue et augmentée. Elle se rattache très étroitement aux volumes sur la Théorie des fonctions que nous avons signalés plus haut. Alors que M. Knopp doit se borner à une première initiation, il expose les principes fondamentaux de la représentation conforme d'après Riemann et ses

continueurs. Il montre, entre autres, le rôle important qu'elle joue dans la théorie du potentiel et conduit le lecteur jusqu'aux problèmes de l'uniformisation.

H. FEHR.

L. WOLFKE. — **Teorja Homologju Linjowej i Plaskiej** (Prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, n° 20). — Un fasc. in-4° de 27 pages et 22 figures, Nakladem Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, Varsovie, 1936.

Ce Mémoire comprend l'exposé systématique de la théorie de l'homologie plane et de l'affinité axiale. La méthode est basée sur la représentation bicentrale et « l'homologie linéaire », qui est définie comme correspondance résultant de deux projections d'une ponctuelle coplanaire avec la droite des centres.

La notion de « l'homologie linéaire » (resp. de « l'élation linéaire ») est équivalente à la projectivité de deux ponctuelles portées sur une même droite qui possèdent des points doubles réels (différents ou confondus). L'auteur estime que c'est la base logique la plus naturelle aussi bien pour l'homologie plane que pour l'homologie dans l'espace. Aux considérations sur l'homologie linéaire et plane, il a ajouté, comme corollaires, les définitions analytiques de l'homologie plane et de l'affinité axiale. Ces définitions conduisent aux théorèmes sur l'invariance du degré d'une courbe algébrique plane.

Le dernier chapitre qui traite des correspondances homologiques propres, contient les résultats des recherches personnelles de M. Wolfke sur l'affinité générale de deux systèmes plans et sur la restitution de l'affinité axiale.

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 1. Livres nouveaux :

**Actes du Congrès interbalkanique de Mathématiciens.** Athènes, 2-9 septembre 1934 (I). — Un vol. gr. in-4° de 294 pages; Imprimerie Nationale, Athènes.

Ce volume contient les conférences, communications et discours du premier Congrès interbalkanique de Mathématiciens qui a eu lieu à Athènes en septembre 1934, sous la présidence de MM. les professeurs P. Zervos et N. Hatzidakis, assistés de M. le professeur G. Papaïannou, secrétaire-général. Nos lecteurs trouveront la liste des travaux dans le compte rendu du Congrès que M. Zervos a bien voulu nous adresser (*L'Ens. mathém.*, 33<sup>me</sup> année, nos 1-2, p. 103-106).

C'est à l'occasion de ce Congrès qu'a été créée la *Revue mathématique de l'Union interbalkanique*. Le Comité directeur est composé de MM. R. de Mises, M. Petrovitch, K. Popoff, G. Tzitzeica, P. Zervos; secrétaire de rédaction: M. G. Papaïannou.