III. — La structure d'ensembles à partir de multiplicités ARBITRAIREMENT PETITES. Les nouveaux théorèmes de pavage.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

exemple aux hypothèses du théorème Phragmen-Brouwer. Le système inductif d'enlacement doit avoir une construction correspondante au problème concret. L'on construit alternativement les cycles et les ensembles de suites fondamentales $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et $\{B^{r-j}\}$ pour les j croissants et l'on fait sur les ensembles B^{r-j} des hypothèses qui autorisent des conclusions inductives. L'on voit ainsi que ce sont seulement les démonstrations des théorèmes exposés brièvement dans la suite qui font voir toute la fécondité des systèmes inductifs d'enlacement.

III. — La structure d'ensembles à partir de multiplicités arbitrairement petites. Les nouveaux théorèmes de pavage.

9. — C'est l'extension locale du théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff qui forme le premier échelon de la théorie infinitésimale des ensembles [**1**, **2**]. Le théorème suivant est valable:

Soit F une multiplicité à r dimensions ou, plus généralement, un ensemble ($\dim F = r$) satisfaisant aux hypothèses du théorème Brouwer-Alexandroff. Soit $F = {}^1F + B^{r-1} + {}^2F$ une décomposition de F par un ensemble B^{r-1} à $(r - 1)$ dimensions en deux composants ouverts ${}^1F$ et ${}^2F$. Alors, il existe une multiplicité à r dimensions *arbitrairement petite* $f^r = {}^1f^r + b^{r-1} + {}^2f^r$ décomposé par un sous-ensemble b^{r-1} de B^{r-1} en deux parties ouvertes ${}^1f^r \subset {}^1F$ et ${}^2f^r \subset {}^2F$.

La démonstration de ce théorème [**6**] découle de l'invariance locale des cycles placés dans les deux premières lignes du système d'enlacement. Le cas particulier $r = n - 1$ de ce théorème fut démontré pour la première fois et par des méthodes très différentes par M. H. D. Ursell et moi-même [**2**, **3**, **4**, **5**, **8**]. Les représentations dites harmoniques de complexes qui surgissent dans ce cas particulier et leurs invariants sont aussi, me semble-t-il, intéressantes en elles-mêmes. Ce théorème entraîne aussi que l'ensemble de tous les points de multiplicités r-dimensionnels dans F est à une dimension.

Les résultats suivants montrent très nettement que *la totalité* *des multiplicités arbitrairement petites de chaque dimension* h $\leqq$ r *a dans un ensemble à* r *dimensions la même étendue que les points de l'ensemble lui-même* [**7**, **9**]. En d'autres termes, si nous considérons toutes les multiplicités arbitrairement petites de diamètre $\leqq \delta$ (δ étant arbitrairement petit), nous voyons qu'elles forment — dans un sens qui s'impose [**9**, § 1] — un système r-uplement connexe et cela que ce soient des courbes ($h = 1$), des surfaces ($h = 2$) ou des hypersurfaces de dimension arbitraire $h \leqq r$. Nous aurons un résultat encore plus précis en considérant l'extension dimensionnelle des totalités des points de convergence des systèmes de multiplicités arbitrairement petites de chacune des dimensions fixes, c'est-à-dire des points de multiplicités définis plus haut (voir le lemme fondamental de § II). Mais pour cela une conception appropriée de la dimension s'impose.

La notion relative de dimension. Soit A un ensemble fermé à r dimensions dans R^n. Nous dirons qu'un ensemble donné Φ (qui n'est pas nécessairement fermé) dans R^n a la *dimension homogène* j relativement à A (hom dim $\Phi = j$ rel A) si j est le plus petit entier positif tel que chaque couple A' et A'' de sous-ensembles fermés et disjoints de A peut être séparé par un ensemble $B \subset A$ dans A ayant au plus la dimension $(r - 1)$, avec hom dim $\Phi = j - 1$ rel B. Si C est un sous-ensemble fermé quelconque de A alors on a hom dim $\Phi = -1$ rel C si Φ et C sont disjoints. Si C est composé d'un seul point, alors on a hom dim $\Phi = 0$ rel C si le point C est intérieur à Φ, hom dim $\Phi = -1$ rel C s'il ne l'est pas [1].

L'on voit immédiatement que cette notion de dimension est extrêmement intuitive. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Soient F *un ensemble à* r *dimensions dans* R^n *et* Φ^h *la totalité des points de multiplicités de dimension* h. *Alors, pour chaque valeur de* h $= 0, 1, \ldots, r$ *l'ensemble* Φ^h *a la dimension homogène* r *relativement à* F.

---

[1] Il est évident que cette définition spéciale s'impose pour la dimension relative à un point. Soient A un segment (0, 1) et $P = A$. Les ensembles de séparation B sont formés de points singuliers et ne contiennent pas de parties disjointes. Pour avoir hom dim $P = 1$ rel A il faut aussi avoir hom dim $P = 0$ rel B (pour chaque B).

Ces théorèmes et aussi ceux que j'exposerai dans la suite n'ont été démontrés jusqu'à présent que pour les ensembles formant des obstacles d'homologie pour des sphères à $(n - r - 1)$ dimensions. Par conséquent, ces théorèmes sont en tous cas valables pour tous les ensembles à $(r - 1)$ dimensions dans R^n. En général, ils sont valables pour tous les cas où l'ensemble satisfait aux hypothèses du théorème inductif Phragmen-Brouwer.

Les moyens dont nous disposons aujourd'hui nous permettent de démontrer pour chaque entier positif $j \leq \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$ le théorème suivant, F étant un ensemble arbitraire à r dimensions et $2r > n + 1$.

La totalité Φ^r *de tous les points de multiplicités à* r *dimensions de* F, *a au moins la dimension homogène* r *rel* F.

10. — Soient F un ensemble à r dimensions dans un voisinage sphérique U de R^n et s^{n-r-1} une hypersphère à $(n - r - 1)$ dimensions et $\sim\!\!\not\!\!\sim 0$ dans U — F. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et soit

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots + F_m , \qquad \delta(F_i) < \varepsilon$$

une décomposition de l'ensemble F. Il est connu qu'il existe, pour chaque ε, des décompositions de F dont chaque $k (k = 2, 3, \dots, 2 + 2)$ parties aient toujours une intersection à $(r - k + 1)$ dimensions. Appelons ces décompositions de F des décompositions *canoniques*. Les théorèmes de pavage suivants sont valables [**10**]:

Pour chaque ε *suffisamment petit il existe* r + 1 *parties de chaque décomposition canonique de* F *qui contiennent des points d'une multiplicité générale arbitrairement petite* f^n *de chaque dimension* h = 0, 1, ..., r.

Il existe, de ce fait, $r + 1$ parties de chaque décomposition canonique de F, ayants des points communs sur des courbes, surfaces et hypersurfaces générales arbitrairement petites de chaque dimension. Il s'agit ici d'un système fixe de $r + 1$ parties pour tous les h. L'on voit aisément que le lemme fondamental de M. Lebesgue correspond au cas $h = 0$ tandis que, pour chaque $h > 0$, nous trouvons un théorème de pavage de dimension supérieure.

La démonstration des théorèmes de pavage découlant du principe inductif d'enlacement donne aussi un résultat *purement quantitatif* sur les ensembles.

Pour avoir l'effet du théorème de M. Lebesgue ou des nouveaux théorèmes de pavage, nous devons évidemment supposer le ε de la décomposition de F « suffisamment petit ». Maintenant nous pouvons reconnaître, au moins en principe, la valeur et la signification de cet ε. Ici de nouveau nous nous restreignons au cas d'ensembles F (dim F $= r$) formant un obstacle d'homologie de la sphère à $(n - r - 1)$ dimensions dans un voisinage sphérique U de R^n.

L'effet de tous les théorèmes de pavage $r + 1$ *se présente pour chaque* $\varepsilon < \frac{1}{3^r} D$, D *étant la distance* $\rho\,(s^{n-r-1}, F)$.

Par conséquent, le ε des théorèmes de pavage dépend de r et D. Plus grande peut-on supposer la distance D, plus grand ε peut être choisi. Dans le cas absolu, où F forme un obstacle d'homologie d'une sphère à $(n - r - 1)$ dimensions R^n, il se peut évidemment qu'on puisse supposer D arbitrairement grand. Dans ce cas l'on peut, de ce fait, supposer ε arbitrairement grand, c'est-à-dire $\leq$ M, M étant un entier positif arbitrairement grand. Il serait intéressant, me semble-t-il, de déterminer le ε pour des classes plus spéciales d'ensembles et de figures géométriques.

Les points de multiplicités de chaque dimension $h = 0, 1, \ldots, r$ permettent aussi d'apporter plus de précision aux théorèmes de pavage [1] [**7**, **10**].

F étant dans U un ensemble enlacé avec la sphère s^{n-r-1} (ou, plus généralement, ayant $s^{n-r-1} \not\sim 0$ dans U — F), alors il existe pour chaque $\varepsilon < \frac{1}{3^r} \rho\,(F, s^{n-r-1})$ une décomposition canonique de F avec $r + 1$ parties, qui contiennent un point de multiplicités commun de chaque dimension $h = 0, 1, \ldots, r$.

[1] La démonstration des nouveaux théorèmes de pavage pour tous les ensembles satisfaisant aux conditions du théorème inductif Phragmen-Brouwer sera indiquée dans un travail postérieur.