Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique

Autor: Hadamard, J.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27304

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de a, b, b'). Mais par un phénomène curieux de véritable cécité psychique, une différence importante était passée inaperçue. Le théorème fondamental que nous venons de rappeler et qui est relatif à l'équation (4) admet, comme on sait, deux sortes de démonstrations très différentes. L'une repose sur un développement en série entière et sur un « Calcul des limites », ou, comme on dit aujourd'hui, la formation de séries majorantes; l'autre sur des approximations successives de tout autre nature (méthode de Cauchy-Lipschitz et méthode de M. Picard). Les géomètres de la fin du XIXe siècle ne remarquaient pas qu'il y avait là non seulement deux espèces de démonstrations différentes, mais deux théorèmes différents, puisque, dans un cas, on supposait essentiellement le second membre de l'équation (4) analytique et holomorphe, défini, par conséquent, dans le champ complexe, au lieu qu'aucune hypothèse de cette nature n'est postulée dans la seconde catégorie de méthodes, où l'on peut se borner aux valeurs réelles des variables.

La démonstration de Sophie Kowalewski est l'analogue de la *première* méthode dont nous venons de parler: elle procède par séries entières et suppose essentiellement les données analytiques tant en ce qui concerne le second membre f de l'équation (1') qu'en ce qui concerne les données initiales g et h.

On a parfois tenté d'établir le même théorème par des méthodes analogues à celles de Cauchy-Lipschitz ou de M. Picard; et même des méthodes de cette espèce se sont montrées fécondes sous certaines conditions convenablement spécifiées. Dans le cas général, elles ont toujours échoué et, comme on va le voir, sont nécessairement vouées à l'échec.

III

Pendant que l'Analyse envisageait ainsi les données de Cauchy comme propres à définir une solution d'une équation telle que (1), un autre chapitre de la Science, à savoir l'étude des potentiels, c'est-à-dire de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (5)$$

introduisait des données d'un type tout différent, à savoir celles de Dirichlet. Il est bien connu qu'une fonction harmonique et régulière à l'intérieur d'un volume donné V est connue dès qu'on se donne sa valeur numérique en chaque point de la surface frontière S de V. Entre cette donnée de Dirichlet et les données de Cauchy, on aperçoit immédiatement une sorte de contradiction: puisque la connaissance de la valeur de u en chaque point de S détermine complètement cette fonction du moment qu'elle doit être solution de (5), il apparaît évidemment qu'on n'a pas le droit de se donner, le long de S, la valeur de u ET celle d'une de ses dérivées.

La donnée de Dirichlet n'est pas la seule que la Physique mathématique puisse introduire pour déterminer une fonction harmonique: *au lieu* de se donner la valeur de u, on peut se donner celle de sa dérivée normale (problème de Neumann) ou (cas de la conductibilité) une de leurs combinaisons linéaires, ou [**4**] une dérivée oblique [1], ou même [**14**] une combinaison analogue contenant des dérivées d'ordre supérieur. On peut aussi — et c'est le cas en Hydrodynamique, toutes les fois qu'il y a une surface libre — avoir affaire à des « problèmes mixtes », dans lesquels les données sont d'une espèce (par exemple, u lui-même) sur certaines régions de la frontière S et d'une autre (par exemple, la dérivée normale de u) sur le reste. Mais si variés que soient ces différents problèmes, ils ont tous un caractère commun: la donnée est toujours *unique* en chaque point de S, contrairement à ce que voudrait l'énoncé de Cauchy-Kowalewski.

Des circonstances tout analogues se présentent pour l'équation « biharmonique »

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{6}$$

[1] Ce problème de la dérivée oblique présente une circonstance exceptionnelle dans la théorie qui nous occupe: il peut être à la fois possible et indéterminé. C'est du moins ce qui arrive lorsque la direction de dérivation est, en certains points, tangente à la surface S (cas d'ailleurs exclu par les auteurs cités). Si, par exemple, la quantité dont on se donne les valeurs le long de S est $\frac{\partial u}{\partial x}$, la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$, laquelle est elle-même harmonique, peut être obtenue par la résolution d'un problème de Dirichlet, et la détermination qui en résulte pour u (par quadrature relative à x), est elle-même harmonique si le terme additif, fonction de y et de z, que comporte la quadrature est convenablement choisi. Mais il reste un terme additif complètement arbitraire (une fonction harmonique quelconque de y et de z). La donnée, à la frontière, de $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ donne lieu à des circonstances analogues (l'origine étant supposée extérieure à V).

qui se présente dans l'étude de l'équilibre élastique plan ou spatial. Une solution régulière de cette équation est déterminée, dans un volume de l'espace ou dans une aire plane, par *deux* données — par exemple u et sa dérivée normale — en chaque point de la frontière au lieu des quatre qu'imposerait, pour cette équation du quatrième ordre, le théorème de Cauchy-Kowalewski. On voit à nouveau apparaître la même discordance que pour l'équation des potentiels (5).

A cette discordance on voit, il est vrai, une première explication. Les deux questions ne se posent pas, par ailleurs, de manière analogue. La solution donnée par le théorème de Cauchy-Kowalewski ne l'est que *localement:* on ne prétend pas affirmer son existence et sa régularité en dehors d'un certain voisinage plus ou moins immédiat de la surface S; au contraire, la solution au problème de Dirichlet doit être définie et régulière dans tout le volume V considéré, et il est même aisé de voir que si l'on renonce à cette condition, le problème devient largement indéterminé [1].

Confrontons donc les deux résultats en nous plaçant dans des conditions entièrement comparables. Considérons une *portion* de surface S — par exemple une portion du plan $x = 0$ — le long de laquelle nous choisirons arbitrairement (quoique, au besoin, avec certaines conditions de régularité) des données de Cauchy et voyons si aux données ainsi assignées correspondra, au moins dans le voisinage de S, une solution de l'équation (5).

Il faut d'ailleurs encore préciser. Dans les conférences qu'il a prononcées à l'Université de Paris, en 1913-14, un géomètre américain dont nous déplorons la perte, Maxime Bôcher, insistait à juste titre sur la nécessité de bien définir ce qu'on acceptera comme solutions d'un problème de cette espèce, définition qui n'a pas toujours été assez nettement spécifiée par les auteurs. Pour le moment, contentons-nous, à ce point de vue, d'observer que la région de l'espace voisine de S est divisée par cette surface en deux régions partielles 1 et 2, de sorte qu'on peut se proposer:

soit de trouver une solution valable dans l'une et dans l'autre de ces deux régions partielles;

---

[1] Il suffit, par exemple, pour le voir, d'imaginer que le domaine V soit creusé d'une cavité V′, dont la frontière S′ servira également de frontière supplémentaire au domaine restant V_1. Si la fonction harmonique cherchée ne doit être définie que dans V_1, on peut se donner arbitrairement, non seulement ses valeurs sur S, mais ses valeurs sur S′.

soit (par analogie avec ce qui se passe dans le problème de Dirichlet) de définir une solution d'un côté seulement de S.

La solution peut-elle exister des deux côtés de S ? *Il n'en peut être ainsi* (la surface S étant elle-même analytique) *que si les deux données de Cauchy* g *et* h *sont analytiquement distribuées le long de cette surface.* En effet, d'après une remarque de Duhem [**13**], les deux solutions partielles définies respectivement dans 1 et dans 2 doivent nécessairement former, par leur ensemble, une fonction harmonique unique, laquelle est analytique.

L'existence de la solution même d'*un* côté de la surface exige, entre les deux fonctions g et h, une relation qui, lorsque l'une d'elles est donnée, définit l'autre à une fonction analytique près[1]. C'est ce que l'on peut voir en traçant une surface auxiliaire Σ qui, avec S, délimite un volume V dans lequel une fonction harmonique peut être définie par des données de Dirichlet, coïncidant avec g le long de S et arbitraires le long de Σ. La fonction de Green G(M, P) relative à V étant, d'autre part, analytique dès que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre, on aura, au voisinage de S,

$$u_P = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{dG(M, P)}{dn_M} u_M \, dS_M + \text{fonct. analyt.} = u_1 + \text{fonct. analyt.} \tag{7}$$

et, par conséquent, on devra avoir, pour la dérivée normale,

$$h = \frac{du_1}{dn} + \text{fonct. analyt.} \tag{7'}$$

En l'absence d'une relation de cette espèce, le problème de Cauchy est impossible. Ce n'est pas lui, mais le problème de Dirichlet ou un problème analogue, qui est ce que nous appellerons « correctement posé », c'est-à-dire possible et déterminé.

Cette conclusion, lorsque nous l'avons formulée, a étonné autour de nous plusieurs géomètres. Peu importe, nous a-t-on

[1] Lorsque S est plan, ce second problème se ramène au premier, en supposant l'une des deux données g, h nulle et étendant la solution d'un côté à l'autre par réflexion à la manière de Schwartz. Mais la méthode indiquée dans le texte a l'avantage de s'étendre aux surfaces courbes et aussi à toutes les équations (linéaires analytiques) du type elliptique.

objecté, que les données g, h ne soient pas analytiques, puisque, d'après le théorème classique de Weierstrass, on peut les remplacer par des fonctions analytiques (et même des polynômes) avec des erreurs aussi petites qu'on le veut.

La réponse à cette objection met en évidence un aspect remarquable du problème. La question n'est évidemment pas de savoir si l'on commet une erreur très petite sur des données, mais si l'on commet une erreur très petite sur la solution. Or, ici, les deux sont loin de revenir au même, comme le montre l'exemple de l'équation à deux variables indépendantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \tag{5'}$$

avec les données initiales

$$\begin{aligned} u(0\,,\,y) &= 0 \ , \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0\,,\,y) &= \mathrm{A} \sin ny \ . \end{aligned} \tag{8}$$

La fonction h ainsi définie est nécessairement très petite en même temps que le coefficient A. Or la solution, savoir

$$\frac{\mathrm{A}}{n} \sin ny \ \mathrm{Sh}\, nx \ , \tag{8'}$$

prend, si petit que soit x (du moment qu'il n'est pas nul) et si petit que soit A, des valeurs énormes, du moment que n est très grand, c'est-à-dire du moment que la fonction h est oscillatoire à période très courte [1].

---

[1] La recherche des surfaces minima se ramène, comme on sait, à l'intégration de l'équation (5'), les coordonnées cartésiennes x, y, z étant fonctions harmoniques de deux paramètres ξ, η. Les formules de Schwarz qui déterminent la surface S passant par une ligne donnée L et inscrite le long de cette ligne a une développable donnée $\mathcal{D}$, *sous la supposition que* L *et* $\mathcal{D}$ *soient analytiques*, résolvent un problème de Cauchy relatif à l'équation (5'). On voit que de très petites altérations sur la distribution des plans tangents à $\mathcal{D}$ le long de la ligne L peuvent modifier du tout au tout la forme de la surface cherchée au voisinage, si immédiat qu'il soit, de L.

Le même problème avait, comme on sait [**10**] été résolu auparavant par O. Bonnet et par Björling [**3**]. Ces travaux — particulièrement les deux Notes d'Ossian Bonnet — manifestent nettement le point de vue adopté, en la matière, pendant le siècle dernier. Il n'y est fait aucune distinction entre une fonction donnée pour des valeurs réelles de la variable et une fonction définie dans le champ complexe.

Avant de quitter le problème de Dirichlet, lequel sera repris dans les conférences suivantes, rappelons que son exemple est un de ceux qui illustrent le mieux le précepte rappelé par Bôcher. Il faut définir avec précision chacune des deux propriétés que l'on impose à la solution cherchée. C'est PAINLEVÉ qui, le premier [**31**], a précisé ce que l'on doit entendre en disant qu'une fonction « prend », sur une ligne ou une surface donnée, des valeurs données. P étant un point déterminé quelconque de la ligne ou de la surface S en question, M un point du domaine Ω qu'elle limite, il faut que u_M tende vers u_P lorsque M tend vers P le long d'un chemin quelconque intérieur à Ω.

D'autre part, u doit satisfaire aux équations aux dérivées partielles. Ceci implique, en principe, l'existence des dérivées secondes (au moins celles qui figurent dans l'équation) et, par conséquent, la continuité des dérivées premières. On a pu d'ailleurs remplacer ces conditions par d'autres moins restrictives dont l'énonciation ne rentre pas dans l'exposé actuel (sauf en un point dont il sera parlé plus loin). Mais une circonstance remarquable est l'apparente contradiction qui existe entre cette condition et la nature des données de Dirichlet, lesquelles ne sont nullement assujetties à être dérivables même une fois. Il en résulte que la surface S sur laquelle ont été prises les données de Dirichlet est en général, pour la solution, une surface singulière, la solution ainsi engendrée étant, au contraire, analytique et holomorphe dès qu'on s'éloigne de cette surface.

Si l'on renonce à cette précision, on peut changer complètement le caractère du problème, et celui-ci peut devenir indéterminé. Un exemple classique est celui de la fonction $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, harmonique et régulière dans tout l'intérieur de la sphère S ($x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$) et qui, sur toute la surface de cette sphère, prend la valeur constante $\frac{1}{2a}$, ceci cessant seulement d'avoir lieu au sens précisé par Painlevé pour l'origine des coordonnées, non sans qu'il n'y ait encore des chemins intérieurs à S et aboutissant en O (tous ceux qui ont un contact du second ordre avec S) avec la valeur limite $\frac{1}{2a}$ pour u.