8. — Groupes de recouvrement

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

puisque la transformation revient à l'identité. Le chemin a peut donc être déformé dans le chemin bab^{-1}. Mais ceci signifie que les classes de chemins représentées par a et b sont permutables (fig. 8). Donc, parmi les surfaces fermées à deux dimensions le tore orientable entre seul en ligne de compte comme variété-groupe.

8. — Groupes de recouvrement.

Nous allons appliquer aux groupes continus la notion de recouvrement et montrerons que toute variété de recouvrement $\overline{\mathfrak{M}}$ d'un groupe continu $\mathfrak{M}$ est encore un groupe continu $\overline{\mathfrak{M}}$. Il est nécessaire pour la démonstration de définir le produit de deux points $\overline{A}$ et $\overline{B}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$, ce que nous ferons de la manière suivante: Nous choisissons un point $\overline{E}$ au-dessus de E et relions $\overline{E}$ à $\overline{A}$ par un chemin $\overline{a}$. Soit a le chemin obtenu en calquant $\overline{a}$ sur $\mathfrak{M}$ et soit A son point final. Au-dessous de $\overline{B}$ se trouve un point B. La transformation $X \rightarrow XB$ qui lui correspond transforme le chemin a en un chemin a' qui conduit de B à AB (fig. 9).

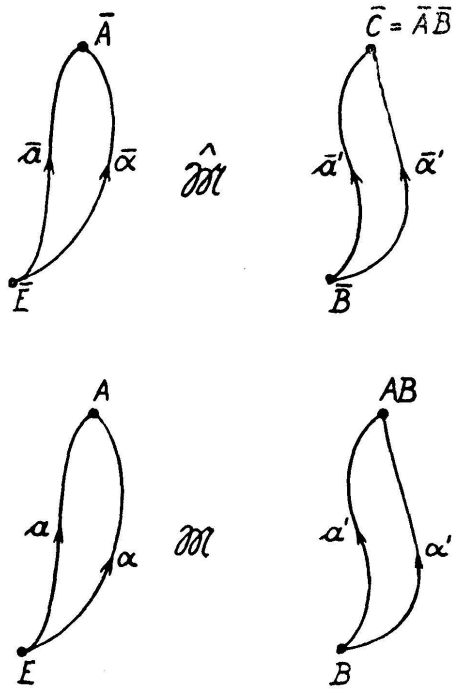

Fig. 9.

Soit $\overline{a}'$ le chemin au-dessus de a' et partant du point $\overline{B}$. C'est son point final que nous appellerons le produit $\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$. Cette

définition est indépendante du choix de $\overline{a}$: si au lieu d'effectuer la construction avec $\overline{a}$ on partait d'un chemin $\overline{\alpha}$, allant également de $\overline{E}$ à $\overline{A}$, les deux chemins $\overline{a}^{-1}\overline{\alpha}$ et $a^{-1}\alpha$ et par conséquent aussi le chemin $a'^{-1}\alpha'$ qui est engendré de $a^{-1}\alpha$ par la transformation B seraient des chemins fermés. Ces deux derniers chemins étant déformables l'un dans l'autre, puisque toute transformation B est une déformation, les deux chemins de recouvrement, $\overline{a}^{-1}\overline{\alpha}$ et $\overline{a}'^{-1}\overline{\alpha}'$ sont aussi déformables l'un dans l'autre. Puisque $\overline{a}^{-1}\overline{\alpha}$ est fermé, $\overline{a}'^{-1}\overline{\alpha}'$ le sera aussi. Donc, le point final de $\overline{a}'$ est le même que celui de $\overline{\alpha}'$. Le produit $\overline{C}$ est donc défini de façon univoque.

Pour démontrer complètement que $\overline{\mathfrak{M}}$ est une variété-groupe, il faudrait encore prouver que les axiomes du groupe sont satisfaits pour la multiplication des points de $\overline{\mathfrak{M}}$ que nous avons introduite. Nous ne nous y arrêterons pas.

Soit $\hat{\mathfrak{M}}$ la variété de recouvrement universelle de $\mathfrak{M}$. Si à tout point $\overline{X}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$ nous faisons correspondre le point situé au-dessous, X de $\mathfrak{M}$, nous faisons par là une représentation homéomorphe (mériédriquement isomorphe) du groupe $\hat{\mathfrak{M}}$ sur le groupe $\mathfrak{M}$. Car le produit $\overline{A}\,\overline{B}$ est au-dessus du produit A B. D'après le théorème d'homéomorphie de la théorie des groupes tous les points de $\mathfrak{M}$, situés au-dessus de l'élément unité E de $\mathfrak{M}$, forment un sous-groupe invariant $\overline{\mathfrak{N}}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$, et $\mathfrak{M}$ est le groupe facteur

$$\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}} / \overline{\mathfrak{N}} \ .$$

Les points situés au-dessus d'un point A de $\mathfrak{M}$ forment une classe de restes de ce groupe facteur. On a donc

$$\hat{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{N}} + \overline{\mathfrak{N}}\,\overline{A} + \overline{\mathfrak{N}}\,\overline{B} + \ldots ,$$

où $\overline{A}$ est un certain point au-dessus de A, $\overline{B}$ au-dessus de B, etc. Les classes de restes forment un ensemble continu correspondant à l'ensemble continu des points de $\mathfrak{M}$. $\overline{\mathfrak{N}}$ est par contre un ensemble fini ou dénombrable d'éléments de $\hat{\mathfrak{M}}$.

La recherche de tous les groupes continus revient maintenant

I° *à trouver tous les groupes simplement connexes et*

II° *à déterminer leurs sous-groupes invariants discontinus.*

La dernière proposition se simplifie quand on se rappelle qu'un sous-groupe invariant discontinu appartient nécessairement au centre du groupe $\hat{\mathfrak{M}}$. Le fait que $\overline{\mathfrak{N}}$ est un sous-groupe invariant signifie que

$$\overline{A}^{-1}\,\overline{N}_1\,\overline{A} = \overline{N}_2 ,$$

où $\overline{N}_1$ et $\overline{N}_2$ sont des éléments de $\overline{\mathfrak{N}}$ et $\overline{A}$ un élément quelconque de $\hat{\mathfrak{M}}$. Si on pose en particulier $\overline{A} = \overline{E}$, on a $\overline{N}_2 = \overline{N}_1$. Si $\overline{A}$ varie d'une manière continue alors que $\overline{N}_1$ reste fixe, $\overline{N}_2$ varie également en une manière continue. Mais, puisque nous avions au début $\overline{N}_2 = \overline{N}_1$, il en sera toujours ainsi, $\overline{\mathfrak{N}}$ étant un ensemble discontinu. $\overline{N}_1$ est par conséquent permutable avec chaque point $\overline{A}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$.

Le premier problème qui consistait à trouver tous les groupes simplement connexes peut être encore réduit. D'après un théorème de O. Schreier [1] $\hat{\mathfrak{M}}$ est déjà complètement déterminé par un voisinage arbitrairement petit de l'élément unité $\overline{E}$. Un tel voisinage de l'élément unité est dit un *germe de groupe*. Deux groupes simplement connexes sont donc égaux dans toute leur étendue aussitôt qu'ils possèdent le même germe.

C'est la classification de tous les germes de groupes qui constitue le problème fondamental de la théorie de Lie. Il est vrai que nous devrons encore faire certaines hypothèses de dérivabilité sur la variété-groupe, avant de pouvoir appliquer les théorèmes de Lie. Un des « problèmes parisiens » de D. Hilbert [2] consiste à décider si ces hypothèses sont nécessaires ou bien satisfaites d'elles-mêmes. Ce problème a été très poussé ces dernières années, mais non pas complètement résolu.

Nous admettons qu'il existe dans le germe du groupe un système de coordonnées.

$$a_1 , \; a_2 , \; \ldots , \; a_n$$

tel que les transformations du groupe possèdent des dérivées continues du deuxième ordre. En vertu du premier théorème principal de la théorie de Lie le germe du groupe peut être

---

1 O. Schreier, Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im grossen. *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.*, 5 (1927), p. 233-244.

2 *Sur les Problèmes futurs des Mathématiques*, § V, Compte rendu du 2e Congrès international des Mathématiciens, Paris, 1900, p. 78.

engendré par n transformations infinitésimales. Dans notre variété-groupe ces transformations seront données par n vecteurs

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$$

attachés au point $\overline{\mathrm{E}}$ [1]. Nous considérons maintenant l'ensemble de toutes les transformations infinitésimales du groupe; elles forment la *gerbe de vecteurs de support* $\overline{E}$. La transformation qu'on obtient à partir de deux de nos vecteurs **u** et **v** par le symbole du crochet appartient d'après le deuxième théorème principal de Lie encore au groupe.

Revenons à l'exemple des rotations rigides de l'espace euclidien $\mathfrak{R}$ autour d'un point fixe O. Un élément A de ce groupe est représenté analytiquement par une transformation orthogonale des coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \ .$$

Le groupe étant d'ordre 3, les 9 coefficients α_{ik} dépendent de 3 paramètres a_1, a_2, a_3. On peut choisir comme tels les trois composantes du vecteur que nous avons adjoint à la rotation. a_1, a_2, a_3 sont donc proportionnels aux cosinus directeurs de l'axe et la longueur du vecteur est égale à l'angle de rotation φ. Les paramètres sont alors des coordonnées de la variété-groupe, au moins dans le voisinage de l'élément unité $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$. Nous n'avons pas besoin d'exprimer les α_{ik} par a_1, a_2, a_3 ni à donner explicitement la transformation de la variété-groupe $\mathfrak{P}$ qui correspond à l'élément $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3)$.

Nous considérons le sous-groupe d'ordre 1 qui contient toutes les rotations autour d'un axe fixe. Le sous-groupe se figure par un segment de droite

$$a_i = u_i t \ , \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq \pi^2$$

de la variété-groupe $\mathfrak{P}$. La transformation infinitésimale qui engendre ce sous-groupe est donnée dans la variété-

[1] Des caractères gras désigneront dans ce qui suit des vecteurs.

groupe $\mathfrak{P}$ par le vecteur $\mathbf{u}$ à composantes

$$\frac{da_i}{dt} = u_i \ ,$$

et dans l'espace euclidien $\mathfrak{R}$ par la « rotation infinitésimale »

$$\frac{dx_1}{dt} = u_3 x_2 - u_2 x_3 = X_1 \ , \quad \frac{dx_2}{dt} = u_1 x_3 - u_3 x_1 = X_2 \ ,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = u_2 x_1 - u_1 x_2 = X_3 \ .$$

Le sens de ces équations est de donner, jusqu'aux membres d'ordre $(dt)^2$ près, les composantes du déplacement, $dx_1 = X_1 dt$, etc. d'un point, aussitôt qu'on connaît ses coordonnées x_1, x_2, x_3 et les valeurs $da_1 = u_1 dt$, $da_2 = u_2 dt$, $da_3 = u_3 dt$ des paramètres correspondant à la rotation, dite infinitésimale.

Soit maintenant

$$\frac{dx_1}{ds} = v_3 x_2 - v_2 x_3 = Y_1 \ , \quad \text{etc.}$$

une autre rotation infinitésimale. L'opération du crochet donne la rotation infinitésimale

$$\frac{dx_1}{dr} = \sum_i \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_i} Y_i - \frac{\partial Y_1}{\partial x_i} X_i \right) =$$

$$= (u_2 v_1 - u_1 v_2) x_2 - (u_1 v_3 - v_1 u_3) x_3 \ , \quad \text{etc.}$$

Cette rotation infinitésimale est représentée dans $\mathfrak{P}$ par le vecteur.

$$\frac{da_1}{dr} = (u_3 v_2 - u_2 v_3) = w_1 \ , \quad \text{etc.}$$

C'est un vecteur que nous désignerons par

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \ .$$

Choisissons pour engendrer notre groupe, les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) \ , \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0) \ , \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1) \ ,$$

correspondant à trois rotations infinitésimales autour de trois axes orthogonaux. Alors, on a

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 , \qquad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 , \qquad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 .$$

Ce que notre exemple nous a enseigné, c'est comment deux vecteurs **u** et **v** déterminent complètement un troisième vecteur que nous pourrons appeler le *produit de* **u** *et* **v**. Ce produit satisfait aux règles de calcul suivantes:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} ,$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0 \quad \text{(Identité de Jacobi).}$$

Ce sont des formules douées d'un sens bien connu du calcul de vecteurs dans l'exemple des rotations rigides. Mais elles subsistent encore pour un groupe quelconque.

D'une manière tout à fait générale, nous appellerons *anneau infinitésimal* toute gerbe de vecteurs dans laquelle on a défini une multiplication satisfaisant à ces deux conditions. Il est clair que la classification de tous les anneaux infinitésimaux possibles est une affaire purement algébrique.

Si $\mathbf{u}_i$ sont les transformations infinitésimales engendrant le germe du groupe il y aura alors $\frac{1}{2} n (n-1)$ relations

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_k = \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} \mathbf{u}_l$$

par lesquelles l'anneau infinitésimal est complètement déterminé. Dans la théorie de Lie les c_{ik}^{l} sont appelés les *coefficients de structure.*

Supposons que nous ayons trouvé un anneau infinitésimal. Le troisième théorème principal de Lie nous permet d'en tirer un germe de groupe. Et de là on arrive à un groupe entier $\mathfrak{M}$ d'après un théorème de E. Cartan, et par conséquent à un groupe simplement connexe $\hat{\mathfrak{M}}$. Finalement, en appliquant à $\hat{\mathfrak{M}}$ les sous-groupes invariants discontinus nous trouverons tous les autres groupes, ayant le même germe [1].

---

[1] Pour les §§ 7 et 8, cf. E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs, *Mémorial des Sciences mathém.*, XLII (1934) et E. Cartan, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des Conférences internationales des Sciencss mathématiques organisées par l'Université de Genève. *L'Enseignement mathématique*, 1936.