8. — Artifice permettant de sauver le principe d'effacement en seconde approximation — Modification des masses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Λ'_h *a l'expression* (26), *avec la valeur* (21) *de* θ_h, *et* ξ_h *est une constante dont on peut encore disposer.* On va le faire dans un moment.

8. — Artifice permettant de sauver le principe d'effacement en seconde approximation — Modification des masses.

Ce qui provient, pour chaque corps, des actions qui lui sont intérieures figure dans nos fonctions lagrangiennes (24′) uniquement par l'intermédiaire des quatre constantes ϖ_h et η_h, définies par les formules (19) et (22). Mettons ces constantes en évidence, en écrivant, d'après (17), $\gamma_h + \varpi_h$ au lieu de γ_{P_h}, dans les expressions (21), (25) et (26) de θ_h, $\mathfrak{M}'_h$ et Λ'_h. Il vient

$$\theta_h = -\varpi_h^2 + 2\gamma_h\eta_{h+1} + 2\varpi_h\beta_h^2 - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \\ + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}},$$

$$\Lambda'_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 - \frac{1}{2}\varpi_h\beta_h^2 + \gamma_h(\varpi_h + 2\eta_{h+1}) + \Lambda_h, \tag{26'}$$

où l'on a posé

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h\right)^2 + \gamma_h\beta_h^2 - 4\gamma_h\underline{\beta}_0 \times \underline{\beta}_1 - \\ - \gamma_h^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 2\gamma_h\beta_{h+1}^2 + \frac{fm_{h+1}}{2c^2}\frac{d^2_{h+1}r}{dx^{0^2}}. \tag{27}$$

Il s'en suit, en revenant à (24′), (25′), et en y remplaçant Λ'_h par sa valeur (26′),

$$\xi_h\mathcal{L}_h = -\frac{1}{2}\varpi_h^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\varpi_h\right)\beta_h^2 + (1 + \varpi_h + 2\eta_{h+1})\gamma_h + \Lambda_h. \tag{28}$$

Maintenant attribuons à la constante ξ_h la valeur $1 - \frac{1}{2}\varpi_h$ et divisons par ξ_h en omettant la constante purement additive $-\frac{1}{2}\varpi_h^2/\xi_h$. A des termes négligeables près, il vient

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h + \Lambda_h.$$

Ceci posé, un petit artifice, dont l'idée générale paraît remonter à M. Droste [1], permet, à notre ordre d'approximation, de faire disparaître le coefficient de γ_h. On n'a qu'à remplacer les masses réelles m_0, m_1 de nos deux corps par des masses fictives

$$\overset{*}{m}_h = m_h\left(1 + \frac{3}{2}\varpi_{h+1} + 2\eta_h\right) \qquad (h = 0,\ 1)\ , \qquad (29)$$

qui peuvent également s'écrire

$$\overset{*}{m}_{h+1} = m_{h+1}\left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right) \qquad (h = 0,\ 1)\ . \qquad (29')$$

Alors, en posant, conformément à (18),

$$\overset{*}{\gamma}_h = \left(1 + \frac{3}{2}\varpi_h + 2\eta_{h+1}\right)\gamma_h = \frac{f}{c^2}\frac{\overset{*}{m}_{h+1}}{r}\ ,$$

l'expression précédente de $\mathcal{L}_h$ prend la forme

$$\mathcal{L}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \overset{*}{\gamma}_h + \Lambda_h\ .$$

Dans le terme Λ_h figurent encore les γ_h; mais, comme Λ_h est du second ordre, on peut y remplacer sans erreur appréciable les γ_h par $\overset{*}{\gamma}_h$.

Après cela il n'y a qu'à supprimer les astérisques, en reprenant la désignation m_h pour les masses gravitationnelles des deux corps, telles qu'elles sont définies par (29) en fonction des masses intrinsèques. Il est bien justifié d'appeler *gravitationnelles* ces deux constantes, qui jouent absolument le même rôle des masses ordinaires, dans le problème relativiste des deux corps, en seconde approximation. Pour notre but c'est tout ce qu'il faut. Mais il convient de remarquer que ces deux constantes, tout en se comportant, même en seconde approximation, comme des masses *pour le problème des deux corps*, ont perdu le caractère intrinsèque que leur attribuait *à tout égard* la mécanique classique. Vis-à-vis d'autres questions, il faudrait sans doute apporter des petites modifications différentes, si tant est toutefois qu'on puisse encore sauver le principe d'effacement par des simples corrections des masses gravitationnelles. On doit donc, pour éviter des malen-

[1] *Loco citato* au n° 5, voir page 454.

tendus, se représenter les masses définies par (29) (et désignées ensuite, elles aussi, par m_0, m_1, en supprimant l'astérisque) comme des constantes caractéristiques du problème, possédant chacune, seulement à peu près, la propriété intrinsèque que la mécanique classique attache à la notion de masse.

9. — Les équations différentielles du problème.

Par tout ce qui précède il est acquis que le mouvement des points P_h, centres de gravité des deux corps, est défini par les fonctions lagrangiennes respectives

$$\mathcal{L}_h = \mathcal{T}_h + \Lambda_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h + \Lambda_h, \quad (h = 0, 1) . \tag{I}$$

De plus Λ_h, d'après (27) et (25′), s'écrit

$$\Lambda_h = \frac{1}{2}\mathcal{T}_h^2 + \frac{2\,l_0 l_1 - l_{h+1}^2}{r^2} + \frac{l_{h+1}}{r}\left(\beta_h^2 + 2\beta_{h+1}^2 - 4\,\boldsymbol{\beta}_h \times \boldsymbol{\beta}_{h+1}\right) + \\ + \frac{1}{2}l_{h+1}\frac{d_{h+1}^2 r}{dx^{0^2}}, \tag{II}$$

étant posé, pour abréger,

$$\frac{fm_h}{c^2} = l_h, \tag{30}$$

de sorte que les constantes l_0, l_1 sont des (petites) longueurs.

Il s'agirait évidemment d'expliciter les six équations

$$\frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \beta_{h|i}} - \frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial x_h^i} = 0 \qquad (h = 0, 1 ; \quad i = 1, 2, 3) \tag{III}$$

définissant le mouvement (absolu) des deux corps, pour passer ensuite à leur intégration dûment illustrée au point de vue géométrique et astronomique. Mais il n'est pas possible de le faire dans le cadre de cette conférence. Je dois donc me borner à quelques indications de méthode et de résultats.

Je viens de dire que les équations (III) définissent le mouvement absolu des points P_0, P_1. Cet appellatif « absolu » doit être interprété d'après le nº 5, en se rapportant par la pensée aux préliminaires de l'admission A_1). On a introduit alors des va-