

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Rudolf Carnap. — Logische Syntax der Sprache. (Schriften zur Wissenschaftlichen Weltauffassung. Band 8). — Un volume p.-8° de 274 pages; broché RM 21,80; Julius Springer in Wien.

Autor: Chevalley, G.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

lence déductive (Deduktionsgleichheit) interviennent dans la réduction des expressions à une forme normale. Le § 5 élargit le calcul des prédicats par l'introduction des axiomes de l'identité et résout l'Entscheidungsproblem dans quelques cas plus ou moins spéciaux.

Avec le § 6 nous entrons dans le cercle des questions qui forment le fond de la discussion actuelle sur les fondements. Un système de 5 axiomes, concernant la relation $a < b$ et la relation « du précédent au suivant » est maintenant introduit, et l'absence de contradiction démontrée par la méthode de réduction de Herbrand et Pressburger. Ce système fait ensuite place à un système (A) de 7 axiomes, dont le principe d'induction ne peut pas être déduit. Celui-ci sera introduit dans le système (B), dont découle alors le « principe du plus petit nombre ». Les conclusions restent toutefois en suspens dans les cas où intervient au moins une « variable-formule ». Le système (B) ne suffit pas pour fonder l'arithmétique. Sous sa forme récursive, celle-ci fait l'objet du § 7. Il se révèle nécessaire d'y introduire successivement les axiomes de l'addition (D) puis ceux de la multiplication (Z). Ce dernier système embrasse toute l'arithmétique, mais la méthode de réduction ne lui est plus applicable. Le § 8 enfin est consacré à l'introduction du symbole iota et à son élimination.

Le problème de l'absence de contradiction dans le système (Z) et les questions attenantes sont renvoyés au second volume.

Ce livre dresse un monument imposant bien qu'encore incomplet, à la doctrine de l'école hilbertienne. Et les réserves qu'on est tenté de formuler s'adressent, non pas à l'ouvrage en lui-même, dont il faut louer à la fois l'exactitude, la clarté et l'ampleur inégalée de la documentation — mais à cette doctrine elle-même. Les notions mêmes de raisonnement dans le concret » (finites Schliessen), de système purement formel (Formalismus) et de la démonstration elle-même (Beweisverfahren) nous paraissent susceptibles d'une analyse plus approfondie. Nous croyons que les résultats de cette analyse pourraient être de nature à affaiblir la force démonstrative de telle ou telle démonstration de non-contradiction.... Mais ceci ne doit pas nous empêcher de sincèrement admirer l'effort dont l'ouvrage dont nous parlons est l'éloquent témoignage.

F. GONSETH (Zurich).

Rudolf CARNAP. — **Logische Syntax der Sprache.** (Schriften zur Wissenschaftlichen Weltanschauung. Band 8). — Un volume p.-8° de 274 pages; broché RM 21,80; Julius Springer in Wien.

Le livre « Logische Syntax der Sprache » est de M. Carnap, l'un des plus éminents représentants de l'école néo-positiviste de Vienne. Il a pour but de faire la théorie de la logique comme ensemble de propriétés du langage.

La syntaxe logique est l'étude des phrases d'un certain langage au point de vue *formel*, c'est-à-dire l'étude de la formation et des transformations licites de ces phrases en faisant abstraction de leur signification. On sait que les exigences de la rigueur mathématique, puis les théories sur les fondements des diverses sciences, ont montré la nécessité absolue de « formaliser » les connaissances, c'est-à-dire de raisonner au moyen de règles définies, sans faire appel à l'intuition directe des objets du raisonnement. De semblables raisonnements se font sur des phrases, non sur des

notions; les règles auxquelles ils sont soumis se rapportent donc à la composition des phrases au moyen de mots ou de lettres et de signes de ponctuation, etc.

Cependant une étude syntactique exacte du langage courant présenterait des difficultés pratiquement insurmontables. C'est pourquoi il vaut mieux analyser le langage logique, infiniment mieux adapté au travail scientifique (pas seulement mathématique d'ailleurs; il me semble que l'emploi des signes logistiques dans les diverses branches du savoir, même les moins mathématisées, y apporterait une clarté supplémentaire qui rachèterait de loin les quelques difficultés momentanées de lecture).

Les deux premiers problèmes qui se posent en syntaxe logique sont: 1^o de déterminer les phrases qui ont un sens, 2^o de préciser les modalités de transformation des phrases, par lesquelles on peut déduire les phrases les unes des autres. Les solutions de ces problèmes sont données: 1^o par les « Formbestimmungen », 2^o par les « Folgestimmungen ».

Ces solutions dépendent naturellement du langage qu'on analyse. Cependant, en règle générale, les « Formbestimmungen » procèdent par une analyse récurrente des figures formées de signes du langage; autrement dit on ramène la question de savoir si tel assemblage de signes donné est une proposition (une expression numérique, etc.) à la condition de savoir si une certaine partie de cet assemblage est lui-même une proposition (ou une expression numérique, etc.). Il s'agit là d'une méthode classique, que Herbrand, a très heureusement désignée sous le nom de « récurrence finie » et qu'il faut soigneusement distinguer de la « récurrence ordinaire ».

Quant aux « Folgestimmungen », l'auteur introduit une distinction, fort importante, entre les « déductions » (« Ableitung ») et les « conséquences » (« Folge »). Les déductions correspondent aux règles de raisonnement habituelles de la logique. On y distingue la déduction immédiate qui est un passage d'une prémisses, jointe aux théorèmes de base (« Grundsätze »), à une conséquence, au moyen de règles de raisonnement (qui peuvent être envisagées, soit comme fixant les opérations que l'on a le droit de faire, soit comme donnant une définition de la deductibilité), et la déduction qui est une suite finie de déductions immédiates. L'auteur définit une démonstration comme étant une déduction sans prémisses (n'oublions pas que les théorèmes de base sont en quelque sorte inclus dans le langage lui-même). Les théorèmes démontrables (conclusions de démonstrations) sont les « propositions vraies » des logiques mathématiques ordinaires.

Par contre la classe des « conséquences » est beaucoup plus vaste. Il est bien connu depuis les travaux de Gödel, qu'il existe en arithmétique des propositions $P(x)$ telles que pour tout nombre particulier a , $P(a)$ soit démontrable, sans que la proposition $P(x)$ soit elle-même démontrable. C'est pour inclure de semblables propositions parmi les propositions vraies, que l'auteur introduit la notion de conséquence d'un ensemble de propositions: si un certain ensemble de propositions est tel qu'il contienne toutes les propositions $P(a)$, a désignant les nombres entiers, ou que $P(x)$ puisse se déduire de certaines propositions de l'ensemble, on dira que $P(x)$ est conséquence immédiate de ce système de propositions. On passe facilement de là à la notion de conséquence médiate.

Les propositions que l'on peut ainsi obtenir au moyen de « conséquences » sont dites *analytiques*. Les propositions telles que toute autre proposition en soit conséquence sont dites « contradictoires ».

L'auteur analyse en particulier deux types de langages, qu'il désigne par I et II, dont le premier correspond à l'arithmétique finitiste et le second comprend les mathématiques tout entières, y compris « l'axiome de choix ». La notion de conséquence que nous venons d'exposer est celle qui se rapporte au langage I. L'auteur annonce, sans la donner explicitement, qu'il possède une définition de la « conséquence » dans le langage II qui lui permet de démontrer que toute proposition mathématique est analytique ou contradictoire (démonstration qui ne se conduit naturellement pas par des moyens finis au sens de Hilbert).

L'analyse logique du langage I est faite d'une manière arithmétique. Pour cela, suivant la méthode de Gödel, on fait correspondre à tous les signes logiques certains nombres entiers, de manière qu'à toute formule écrite avec les signes du langage I corresponde d'une manière bien déterminée un entier (l'analyse de cet entier, notamment sa décomposition en facteurs premiers, permet de retrouver la formule). Les règles de déduction peuvent être alors données sous forme de définitions purement arithmétiques. La traduction ainsi définie de la syntaxe du langage I est effectuée complètement par l'auteur. Le résultat de cette traduction est la formalisation de la syntaxe de I dans le langage de I.

De même on peut formaliser la syntaxe de II dans le langage de II. L'auteur montre que le langage II contient des théorèmes non-démonstrables et par suite est non-contradictoire.

Après ces considérations relatives à des langages particuliers, l'auteur donne des définitions qui peuvent s'appliquer à tous les langages dans lesquels ont été définies des « Formbestimmungen » et des « Folgebestimmungen ». Il s'agit ici, à partir de la structure formelle de ces « Bestimmungen », de définir les divers termes logiques. Il est remarquable que l'on arrive ainsi à délimiter formellement des notions qui semblent faire appel à la signification des signes du langage.

Nous ne pouvons donner ici toute la liste des définitions introduites par l'auteur. Signalons cependant que l'on peut distinguer les langages *logiques* (L-Sprache), de ceux qui contiennent des assertions de nature physique, et que tout langage contient un sous-langage logique maximum. Ceci permet de distinguer entre propositions *valables* (gültig) et *analytiques*, les premières étant celles qui peuvent être obtenues par voie de conséquence, les secondes celles qui peuvent être obtenues dans le sous-langage logique contenu dans le langage considéré.

L'auteur traite également des traductions d'un langage dans un autre, c'est-à-dire des correspondances entre expressions de ces deux langages. Il n'y a naturellement d'intérêt qu'à considérer celles de ces traductions qui conservent les structures logiques (changent les propositions en propositions, etc...). Ces traductions peuvent être considérées comme des *significations* données à un langage.

A ce propos, l'auteur attache une grosse importance à certaines propositions qu'il appelle « quasi-syntactiques ». Ce sont celles qui, dans un certain langage, tout en étant formulées comme des affirmations sur les objets dont parle ce langage, sont en réalité des affirmations sur la structure des phrases mêmes du langage. Ce caractère de quasi-syntacticité se laisse d'ailleurs définir d'une manière formelle grâce à l'immersion possible du langage S_1 dans un autre langage S_2 qui contienne une syntaxe pour S_1 .

Si une proposition quasi-syntactique porte sur un objet désigné par A_1

et que, traduit dans S_2 , il donne une proposition se rapportant à l'expression « A_1 », elle peut, dans sa forme primitive, être considérée soit comme portant sur A_1 (qui se trouve jouer à la fois dans la même proposition le rôle d'objet et de signe, c'est-à-dire qui est désignation de soi-même), soit comme portant sur l'objet désigné par A_1 . Ces deux points de vue peuvent encore se distinguer d'une manière formelle.

Dans le premier cas, on dit que la proposition appartient au mode de langage autonome, dans le second cas qu'elle appartient au mode informatif (mauvaise traduction de « inhaltlich »). Or, les phrases quasi-syntactiques du mode informatif ont fort souvent l'apparence d'affirmations positives sur les objets; et cette apparence prête à des discussions souvent stériles qui ne s'éclairent que par la compréhension du fait que les points discutés se réfèrent à un langage particulier, hors la donnée duquel ils ne sauraient avoir de sens.

La reconnaissance du caractère quasi-syntactique de la plupart des phrases, sur lesquelles des discussions s'éternisent depuis des années ou des siècles, conduit l'auteur à penser que la philosophie des sciences consiste essentiellement en une analyse syntactique des divers langages scientifiques. Toutes les questions philosophiques qui ne se traduisent pas ainsi en questions techniques sur les formalismes des diverses sciences lui paraissent illusoire, et généralement mal posées par suite d'un emploi abusif du mode informatif du langage pour formuler des propositions quasi-syntactiques. Inversement l'auteur montre que, dans la théorie de la syntaxe, se posent des questions bien définies (étude des fondements, unicité de la science, etc...), lesquelles héritent généralement de ce qu'il y avait de solide dans les questions que l'on posait jusque-là en termes vagues de philosophie générale.

En somme, le livre de M. Carnap se recommande à bien des points de vue. Tout d'abord celui qui aurait encore peu de connaissances en logique mathématique pourrait y trouver, expliqués avec grand soin, les fondements d'une mathématique intuitionniste (Langage I), comparée à ceux d'une mathématique qui ne l'est pas. D'autre part la formalisation de la syntaxe de I dans II est complètement donnée, avec des notes explicatives qui expliquent en langage courant le sens des définitions logiques, sous forme arithmétique, qui sont posées.

Toute la seconde partie (définitions relatives à une logique quelconque) est fort utile à qui veut, dans chaque science, comprendre avec clarté les démarches de l'esprit humain. De plus le chercheur y trouvera une masse de suggestions qui orienteront ses recherches dans des voies certainement neuves et probablement très fécondes.

Enfin la troisième partie (Syntaxe et philosophie) est précieuse pour le philosophe: elle lui montre que les systèmes philosophiques, dans la mesure où ils prennent une forme sinon dogmatique, du moins intellectuelle, tombent, à juste droit, sous le coup de la critique des logiciens, critique plus que tout autre implacable; parce que ne portant que sur la forme, nullement sur ce qui est affirmé. Une telle critique sera, espérons-nous, fatale à cette forme de philosophie qui semblait avoir pour ambition de fuir devant la vie et le concret, de se réfugier dans un intellectualisme plus ou moins pur; déjà ébranlée par un mouvement comme le bergsonisme, qui lui demandait compte de ce dont elle ne parlait pas, elle perd toute

viabilité devant une critique de logiciens, venant lui demander compte de la *manière* dont elle parle. C. CHEVALLEY (Paris).

G. LORIA. — **Metodi Matematici**. Essenza. Tecnica. Applicazioni. (Manuali Hoepli). — Un vol. in-16 de xv-276 pages avec 51 figures dans le texte, relié L. 20; Ulrico Hoepli, Milan, 1935.

Dans ce nouveau volume de la Collection Hoepli, le savant professeur de l'Université de Gênes initie le débutant aux principales méthodes mathématiques. Accessible à ceux qui ne possèdent que les mathématiques élémentaires, son exposé montre, à l'aide d'exemples choisis dans les différents domaines des mathématiques, quels sont les types de raisonnements auxquels on peut avoir recours.

L'ouvrage est divisé en trois parties. La première traite des méthodes d'un caractère général: Analyse et synthèse. — Réduction à l'absurde. — Induction complète. — Logique mathématique. — Le rôle de l'analogie. — Généralisation.

La seconde partie est consacrée aux méthodes se rapportant aux questions de géométrie: La construction comme méthode de démonstration; les polyèdres réguliers. — Sur un type de raisonnements relatifs au triangle. — Problèmes du 1^{er} et du 2^{me} degré relatifs à la droite et au cercle. — Constructions; rectification. — Géométrie projective. — Géométrie descriptive. — Emploi des coordonnées; géométrie analytique. — Méthodes de recherches en usage en géométrie algébrique.

Dans une dernière partie viennent les méthodes particulières à la science des nombres: Théorie des nombres. — Algèbre. — Méthodes introduites au XVII^e siècle; le concept de l'infini; le passage à la limite. — Analyse infinitésimale.

Il n'est guère besoin d'ajouter que l'on retrouve dans ce petit volume les excellentes qualités qui caractérisent tous les ouvrages de l'illustre géomètre italien.

H. FEHR.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

W. LIETZMANN. — **Altes und Neues vom Kreis** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 87). — Un vol. in-16 de 47 p. et 52 fig., cart. RM 1,20; B. G. Teubner, Leipzig, 1935.

F. SCHILLING. — **Die Pseudosphäre und die Nichteuklidische Geometrie**. I. Teil: **Die geodätischen Linien der Pseudosphäre und deren Umwelt**. Zweite erweiterte Auflage. Mit 64 Fig. u. Bildnistaf. — II. Teil: **Die geodätischen Kreise der Pseudosphäre und deren Umwelt**. Mit 78 Fig. u. 1 Figurentaf. — Un vol. in-8° de 215 p., relié, RM. 13,60; B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1935.