Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Maurice LECAT. — **Erreurs de Mathématiciens des origines à nos jours.** — Un volume gr. in-8° de XII-168 pages. Prix: 90 francs belges. Librairies Castaigne, Bruxelles, et Em. Desbarax, Louvain, 1935.

Voici un ouvrage dont le succès me semble assuré, ne s'agirait-il que d'un succès de curiosité. Mais l'auteur obtiendra beaucoup plus; comme il le fait remarquer, le mécanisme de certaines erreurs incite à penser. Plus elle est l'apanage d'un grand esprit, plus elle renseigne sur la psychologie du savant et plus elle peut être féconde. Se trouver sur les listes de M. Lecat n'a rien de péjoratif; c'est voisiner avec Abel, Cauchy, Cayley, Chasles, Descartes, Euler, Fermat, Galilée, Gauss, Hermite, Jacobi, Lagrange, Laplace, Legendre, Leibniz, Newton, Poincaré et Sylvester. Il y a bien, dans l'ensemble 330 mathématiciens fautifs représentant environ 500 erreurs que l'on peut qualifier d'intelligentes car il n'est jamais question de ces erreurs morbides et épidémiques qui concernent, par exemple, la quadrature du cercle ou le grand théorème de Fermat.

L'idée d'établir de telles classifications remonte à M. Ed. Maillet et à la Question 2855 de *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904. Ce n'est pas la première fois que ce Recueil, dont il faut toujours regretter la disparition, conduit à la publication d'une documentation très étendue. Rappelons seulement H. Brocard et les courbes géométriques.

Pour en revenir aux erreurs, certaines corrections seraient sans doute à réexaminer dans un esprit d'impartialité absolue. Ainsi Joseph Bertrand donnant une expression approchée de L $(1 + k)$, Eug. Catalan, *ennemi de J. Bertrand*, affirme que c'est inexact. J'aimerais à rechercher si les mots soulignés n'influent pas sur l'affirmation.

A la page suivante c'est J. Bertrand qui corrige Biot. L'allégorie de la paille et de la poutre tend souvent à transparaître. D'ailleurs Catalan lui-même est corrigé par Dickson. Cauchy et ses mésaventures (il fut destitué deux fois) inspirent amèrement M. Lecat. Galois, qui n'erra jamais, fut aussi bafoué; Einstein est dépouillé officiellement de ses biens, Lavoisier fut guillotiné. L'erreur n'est pas le privilège des cerveaux mathématiques mais c'est, sans doute, sur le terrain mathématique qu'elle peut le mieux s'analyser; on retrouve l'idée fondamentale qui présida à l'élaboration du livre.

Chasles fit quelques erreurs en géométrie ce qui ne l'empêcha pas de créer la Géométrie supérieure et ce qui n'était rien à côté de la prodigieuse naïveté qui fit de lui la victime du faussaire Vrain-Lucas. On perçoit un peu que M. Lecat n'aime pas l'Institut de France et que, plus généralement, il n'aime pas les Académies, pas même celle de Belgique qui laissa persécuter

De Tilly mais qui devait cependant se relever glorieusement sous le règne du roi Albert.

Notre grand Henri Poincaré ne me paraît pas avoir d'erreur grave; à propos du spectre cannelé il en fait une corrigée par Arth. Schuster dans une Note aux *Comptes rendus* présentée par Poincaré lui-même ! Voilà qui est bel et bien et tout à fait dans la manière de l'illustre savant. Et quelles erreurs celui-ci n'a-t-il pas corrigées en dévoilant la divergence des séries de la Mécanique céleste, d'abord seul et ensuite contre Gyldén.

J'arrête ces citations très improvisées. Elles suffisent à éveiller tout l'intérêt mérité par une œuvre curieuse et profonde. L'impression du volume est curieuse aussi; elle n'est faite que sur les pages de gauche et en travers si bien que sous chacune de ces pages on a un espace, de même étendue, complètement blanc. Pourquoi ? Probablement pour que l'on soit tenté d'intercaler beaucoup de notes manuscrites qui, communiquées à l'auteur, lui permettront d'élaborer une seconde édition plus intéressante encore. Toutefois, en attendant celle-ci, nous ne pouvons que pronostiquer, à nouveau, le succès de la première. A. Buhl (Toulouse).

Antoni Zygmund. — **Trigonometrical Series** (Monografje Matematyczne, tome V). — Un volume gr. in-8° de iv-332 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Seminar. Matem. Uniw. Warsz. Oczki, Nr. 3. Warszawa, 1935.

Ces Monographies polonaises continuent décidément à se distinguer. En examinant ce nouveau volume, j'y ai cependant retrouvé quantité de choses déjà rencontrées en des ouvrages américains analysés en notre dernier fascicule, ouvrages qui empruntaient beaucoup, eux-mêmes, à la science de l'ancien continent. Une marée mathématique nouvelle balaie le globe; le lieu d'étude est peut-être assez différent mais il faut être « au niveau ». Voici un nouveau Traité sur les Séries trigonométriques qui ne manque point d'y être. De plus, la Pologne s'égale aux pays de grande et profonde production mathématique.

Les débuts du livre sont particulièrement engageants. Séries trigonométriques déduites de séries entières. Transformation d'Abel, pour les sommes en $u_k v_k$, qui fait déjà penser à la moyenne de Cesàro. Orthogonalité et séries de Fourier qui apparaissent dès que la représentation fonctionnelle est en jeu et alors intégration poussée tout de suite jusqu'à la conception de Stieltjes. Le *module de continuité*, de Lebesgue, $\omega(\delta)$, relatif à un intervalle δ et à un maximum d'oscillation dans cet intervalle, permet de majorer facilement les coefficients d'un développement de Fourier. Puis apparaissent les intégrales qui correspondent à des développements limités, notamment les « noyaux de Dirichlet » suivis de « tests » plus modernes dus à Dini, Jordan, Young, La Vallée Poussin, Lebesgue, Hardy-Littlewood,...; tous ont la forme intégrale et sont parfois apparentés.

La sommabilité peut être incluse en la théorie des matrices, ce que la transformation d'Abel, déjà citée, laissait prévoir. Le théorème de Fejér possède maintenant de nombreux corollaires et aboutissements divers.

D'une extrême importance est le Chapitre IV relatif aux classes de fonctions et aux séries de Fourier. Après de nombreux théorèmes (Young, Riesz-Fischer, Hardy, ...) il découvre, plus généralement, des classes d'opérations fonctionnelles situables en des espaces linéaires et métriques, donc

physiquement utilisables. Il y a là un aboutissement aux théories hilbertiennes où les généralités sont vues avec le mécanisme trigonométrique parfois particulier mais d'un jeu toujours manifeste.

Cet esprit se poursuit avec le Chapitre V consacré à des séries spéciales mais propres à éclairer de mieux en mieux la théorie générale; il faut signaler tout spécialement les séries lacunaires.

Le Chapitre VI traite de la convergence absolue des séries trigonométriques. Le sujet est entièrement moderne avec Lusin, Denjoy, Fatou, Wiener.

Le chapitre VII traite de la série conjuguée qui, associée à une série primitive, permet de faire apparaître une série à variable complexe rapprochant le tout de la théorie des fonctions analytiques.

Viennent (chapitre VIII) les séries divergentes et le fameux phénomène de Gibbs, souvent signalé, qui consiste en une représentation d'une discontinuité par une courbe continue approchée mais qui n'approche point la discontinuité en question sans une sorte d'élan qui la dépasse de part et d'autre. Les exemples et exercices divers qui terminent ce chapitre montrent d'ailleurs que ce n'est pas l'un des moins accessibles à l'analyse brillante.

Les coefficients de Fourier satisfont (chapitre IX) à un type de relations inauguré par le théorème de Parseval mais largement généralisé avec l'aide d'exposants fractionnaires. Ici se placent notamment les théorèmes de Paley, jeune savant mort prématurément et dont nous avons parlé récemment à propos des *Fourier Transforms in the Complex Domain*. Après de nouveaux théorèmes sur la sommabilité et la convergence (chapitre X) et la Théorie de Riemann (chapitre XI), l'ouvrage se termine d'ailleurs par ces *Fourier Transforms* et, plus généralement, par les intégrales de Fourier. Un autre volume aurait pu être consacré à ces intégrales; celui qui vient d'être écrit suffit toutefois à donner une idée récente et des plus claires de l'une des plus belles disciplines mathématiques. A. Buhl (Toulouse).

J. A. Schouten und D. J. Struik. — **Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.** Deuxième édition. Tome I: *Algebra und Uebertragungslehre*, von J. A. Schouten. — Un volume gr. in-8° de xii-204 pages. Prix: broché, Fl. 6; relié, Fl. 6,90. P. Noordhoff N. V. Groningen-Batavia. 1935.

Ce bel ouvrage, dédié à M. Tullio Levi-Civita, n'est, en effet, que le Calcul différentiel absolu. Mais, depuis une dizaine d'années, que de chemin parcouru ! Les dérivées partielles ordinaires ou généralisées n'ont plus que des notations à indices et il en est de même pour les jacobiens. Dans ces conditions, toute la notation semble algébrique et l'exposé peut commencer par un premier chapitre se rapportant très simplement à une algèbre à indices. C'est aussi l'algèbre des *objets géométriques*, objets transformables en d'autres sans que le procédé de transformation puisse jamais altérer l'objectivité dont il s'agit, l'algèbre des groupes, des géométries kleinéennes, de grandeurs ou quantités d'une merveilleuse richesse. Ces grandeurs sont des scalaires, des vecteurs co- ou contravariants, des affineurs de valence quelconque, des densités scalaires ou affines; on peut leur associer des grandeurs conjuguées d'où les constructions hermitiques auxquelles on a, le plus souvent, donné une origine intégrale mais qui sont

maintenant atteintes avec le secours des déterminants fonctionnels. Ceci est d'ailleurs fort naturel puisque le déterminant fonctionnel est l'instrument essentiel de la transformation des intégrales multiples.

Les jeux d'indices donnent des classifications nouvelles pour faits et objets; c'est ainsi qu'il y a une *isomérie* tensorielle qui pourrait bien rapprocher géométrie et chimie encore que, pour le moment, il ne s'agisse que de géométrie.

Plus loin, les transformations linéaires, les modes d'action des groupes, les algorithmes, tels l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann ou les quaternions d'Hamilton, retrouvés comme cas particuliers, montrent la toute puissance des méthodes nouvelles.

La valence des affineurs donne aussi un merveilleux procédé de classification tout imprégné de symétries matricielles surtout hermitiques. Il peut encore y avoir un aboutissement en faveur de la géométrie algébrique ou de celle qui se rattache aux transformations de l'équation de Schrödinger.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée aux déplacements ou transports *(Uebertragungslehre)*. Le déplacement par parallélisme généralisé, dû encore à Levi-Civita, en fut le prototype; il devient ici le *pseudo-parallélisme* mais avec quelles généralisations ! Ce sont d'abord celles, de nature pfaffienne, dues à M. Elie Cartan. Les dérivations covariantes se sont compliquées mais pour atteindre des *courbures* dont la notion logique laisse loin derrière les anciennes notions sensibles. Et cependant ces notions logiques peuvent intervenir dans le domaine phénoménal; au delà des représentations tangibles, elles caractérisent l'effort de l'intelligence pure. C'est là un tournant de la Science qui est d'importance prodigieuse.

Il y a une symbolique particulièrement puissante due à Van der Waerden et Bortolotti, symbolique d'abord appuyée sur une formule de R. Lagrange. L'identité de Bianchi s'est considérablement développée. Les extensions de la formule de Stokes ont acquis un rôle synthétique encore signalé dans les travaux de M. Elie Cartan et qui m'a toujours été personnellement très sympathique.

Enfin les dérivées variationnelles de Lagrange (ne pas confondre avec R. Lagrange) permettent des reconstructions ayant toute la généralité des algorithmes précédents.

On ne saurait trop attirer l'attention sur cette réexposition qui, pour le moment, n'est due qu'à M. Schouten. Ce n'est pas d'une science difficile; qu'on se pénètre bien de la notation et tout coule de source. Mais quoiqu'on puisse penser de l'effort à faire, celui-ci apparaît maintenant comme inéluctable. On sait l'immense importance de la Géométrie différentielle à la manière de Bianchi; il s'agit ici d'un surbianchisme impossible à ignorer désormais. Il constitue comme une curieuse réaction de défense du Calcul différentiel à une époque où tout le monde croit apercevoir beaucoup plus de généralité dans le Calcul intégral. A. Buhl (Toulouse).

Georges Bouligand. — **Premières Leçons sur la Théorie générale des Groupes.** Applications à l'Arithmétique, à l'Algèbre, à la Géométrie. — Un volume gr. in-8° de viii-242 pages. Prix: 40 francs. Vuibert, Paris, 1935.

Ouvrage absolument merveilleux qui est de l'époque présente, de l'heure même, qui s'apparente aux ouvrages de Schouten, Struik, Salkowski,

analysés tout à côté, comme aux Cours de Géométrie d'Estève et Mitault, au modernisme desquels nous n'hésitons point à rendre hommage. Tout cela c'est l'élan actuel, c'est la revision des principes mathématiques avec l'appui des notions et du langage physique, c'est le triomphe de la notion d'invariant, soit différentiel soit intégral, avec sa prodigieuse puissance constructive. Et cependant l'étude que nous présente M. Bouligand pourrait être commencée en Spéciales; elle jouera, à coup sûr, un rôle de premier ordre dans nos Facultés où, hélas, l'esprit de routine demande souvent à être combattu.

Il faut convenir aussi que l'histoire de la Science est souvent étrange. Les groupes de Lie ont été longtemps représentés par l'ouvrage en trois volumes qui s'est tout de même épuisé, comme l'atteste une réimpression récente, mais qui, chez beaucoup, a suscité plus d'effroi que d'enthousiasme. Des ouvrages satellites, rédigés notamment avec la collaboration de G. Scheffers, tentèrent de faciliter l'accès de la rigide tour d'ivoire mais ce n'est vraiment que maintenant, après la Gravifique et son prodigieux contre-coup (suivant l'expression de M. Elie Cartan) sur les développements de la Géométrie, après divers épanouissements géométriques qui ont comme profité de l'occasion, qu'on peut parler d'élémentarisations vraiment pleines de charme et de valeur éducative.

Quoiqu'il en soit, en fait d'élémentarisations, M. Bouligand vient d'en écrire une avec le plus ramarquable des talents. Le groupe est essentiellement *causal;* il engendre, il réunit, il ordonne. Il ne faut pas être trop exclusif; diverses disciplines, notamment géométriques, une fois situées, peuvent, avec grand intérêt, vivre d'une vie propre mais, en Arithmétique, en Algèbre, comme d'ailleurs en Mécanique quantique, il est souverain parce qu'on peut lui faire correspondre tout un symbolisme qui s'accorde ou ne s'accorde pas avec des idées, des modes opératoires préconçus. C'est ainsi que les groupes de substitutions attachés aux racines des équations algébriques ne se représentent pas par des combinaisons de radicaux. Et, sur ce point, l'esprit scrutateur de M. Bouligand atteint à des simplifications préliminaires qui vraiment sont fort inattendues.

En Géométrie, les inversions, strictement considérées en elles-mêmes, ne forment pas un groupe mais z', fonction homographique de z, en donne un et ceci suffit pour engendrer une géométrie anallagmatique, élégante et subtile, qui semble être une sorte de réplique de l'automorphisme. Rappelons que c'est en géométrie anallagmatique que l'on rencontre la notion de *parataxie;* il conviendrait de citer ici Hadamard, Gambier, Robert, Labrousse, Frank et F.-V. Morley, ces deux derniers auteurs ayant publié une *Inversive Geometry* analysée dans *L'Enseignement mathématique* (32me année, 1933, p. 281). D'ailleurs, à propos des domaines fondamentaux, que l'auteur s'excuse de ne traiter que sur des exemples, on retrouve les considérations d'automorphisme desquelles Henri Poincaré tira tant de choses continuées d'ailleurs actuellement. De tels exemples en disent peut-être plus que beaucoup d'exposés généraux mais abstraits.

Ceci n'empêche pas que tout un chapitre est consacré à la génération des groupes suivant les idées de Lie mais non sans préliminaires vectoriels, sans *divergence* à associer au *système différentiel*, ce qui pourrait être fait suivant le schème

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_i = 0 \ , \qquad \Phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \ .$$

Ensuite ce sont les considérations arithmétiques auxquelles j'ai déjà fait allusion. La Théorie des Nombres y trouve son compte avec un théorème de Fermat déjà rapproché des groupes par G.-A. Miller en un article encore publié ici (29me année, 1930, p. 7).

Les considérations algébriques déjà mentionnées vont jusqu'à une esquisse de la théorie de Galois. Les géométries algébrique, réglée, cayleyenne conduisent aux géométries non holonomes qui doivent tant aux travaux de M. Elie Cartan; ce serait encore le cas de citer Schouten et Struik. Enfin, toujours dans le même ordre d'idées, nous terminons par la transformation des algorithmes, des théories elles-mêmes. Presque tout est encore emprunté à M. Elie Cartan et avec quelle justesse, avec quelle justice ! Algèbre tensorielle, nombres hypercomplexes, quaternions, calcul extensif de Grassmann, formules stokiennes par transformations immédiates et intuitives d'intégrales multiples; il y a introduction à tout. Une cinquantaine d'exercices, encore très intuitifs, invitent à d'autres reconstructions théoriques. Mais à quelle forme d'admiration un tel ouvrage n'invite-t-il pas ? A. Buhl (Toulouse).

Ernst August Weiss. — **Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik** (Teubners Mathematische-Leitfäden, Band **41**). — Un volume in-8° de vi-122 pages. Prix, cartonné, R.M. 7.60. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1935.

Encore une œuvre qui éveille des réminiscences mais quelle œuvre n'en éveillerait point. Ici je me reporterais volontiers aux *Geometrische Konfigurationen* de Friedrich Levi et aux *Notions sur la Géométrie réglée* de G. Bouligand (voir *L'Ens. mathématique*, t. 28, 1929, pp. 331 et 338). Il s'agit d'une Géométrie, issue de celle des complexes, qui revient à l'étude d'une multiplicité quadratique dans un espace à 5 dimensions cependant que la Cinématique est en posture analogue dans l'espace à 7 dimensions. La première conception est de F. Klein, la seconde de E. Study dont M. Weiss est un brillant disciple. On pourra encore se reporter, dans *L'Enseignement mathématique* (t. 29, 1930, p. 225) à un Eloge funèbre que le disciple a consacré au Maître.

On part du complexe linéaire et des coordonnées de Plücker; les six coordonnées plückériennes sont tout de suite coordonnées homogènes pour un point d'un R_5 où l'identité de Plücker donne la M_4^2 dont l'équation se met sous la forme kleinéenne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0 .$$

Vraiment, voilà un début qui est tentant et tout le reste justifie la tentation initiale; il me semble qu'il n'y a pas, dans ce livre, une seule formule qui ne porte la trace évidente de quelque symétrie. Naturellement la M_4^2 précédente admet des générations par multiplicités linéaires et en redescendant ainsi vers l'élémentaire on trouve (ce qui ne se traduit pas toujours très bien en français) des forêts, des buissons, des faisceaux de complexes et finalement de simples configurations constructibles, avec un nombre fini de droites, à la manière des théorèmes de Desargues et de Pascal.

Mais quelle envolée généralisatrice ! R. Weitzenböck a donné toute une symbolique pour la représentation des complexes d'où une nouvelle manière de faire surgir les plus remarquables configurations (Möbius, Kummer, ...). Différents modes de projection appliqués aux figures hypersphériques donnent, dans l'espace ordinaire, toute une géométrie qui est celle des cyclides, notamment celle de la cyclide de Dupin. Ici se place également la fameuse configuration de Study dite *double-cinq* (Doppelfünf). Plus loin est celle de Petersen et Morley. Les considérations métriques hyperspatiales sont également propres à éclairer, d'un jour nouveau, la métrique de l'espace ordinaire.

Soyons brefs quant à la Cinématique. Elle n'est pas moins merveilleuse que la géométrie qui précède. Elle donne immédiatement et naturellement les quaternions de Hamilton. Elle conduit aux *Somen* de Study (*Soma* au singulier) qui admettent de remarquables considérations duales. Tout est remarquable dans cet ouvrage aussi substantiel que bref qui, par son aboutissement cinématique, pourrait conduire à une Mécanique générale. Il y a vraiment là tout un Univers construit avec une élégance qui sera, sans doute, bien difficile à surpasser. A. Buhl (Toulouse).

Erich Salkowski. — **Affine Differentialgeometrie** (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine und angewandte Mathematik. Band 22). — Un volume gr. in-8° de 204 pages et 23 figures. Prix, relié, R.M. 10. Walter de Gruyter & Co. Berlin W et Leipzig, 1934.

Ceci est essentiellement un ouvrage d'enseignement comme il commence à en exister beaucoup de par le monde, en France moins qu'ailleurs, hélas ! Il s'agit de reprendre les théories les plus ordinaires concernant la géométrie des lignes et des surfaces avec des considérations groupales et tensorielles. Les considérations affines sont naturellement les plus indiquées car, si j'écris

$$P_\lambda = a_\lambda^k P_k \,, \qquad P_{\lambda\mu} = a_\lambda^i \, a_\mu^k P_{ki} \,,$$

je n'ai d'abord qu'une affinité dont la généralisation est manifeste pour un *tenseur* d'ordre 2 et, de là, pour un tenseur d'ordre quelconque. Combien il est étonnant que des choses si simples, bien qu'entrevues par quelques précurseurs de génie tels Grassmann, aient eu besoin des théories einsteiniennes pour s'imposer.

Les courbes planes sont ici analysées sommairement quant aux notions de courbure, mais non sans aboutissement à l'équation naturelle ou intrinsèque, et le livre n'est pas sans rappeler la *Natürliche Geometrie* de G. Kowalewski, publiée, en 1931, dans la même collection et analysée ici même.

Cette impression s'accentue, dans la seconde partie, avec la géométrie affine de l'espace.

Les notions métriques prennent leur plus grande valeur, sur les surfaces ou espaces de Riemann à deux dimensions. Les directions conjuguées sont *orthogonales*, les directions asymptotiques sont *isotropes*, en donnant, bien entendu, aux mots soulignés leur sens métrique général et non le sens euclidien. Les lignes géodésiques sont liées au point de vue variationnel.

La non équivalence des surfaces ayant une même forme quadratique fondamentale porte à des extensions, notamment vers la forme cubique $a_{ikl}\,du^i\,du^k\,du^l$. Les distinctions sont surtout très nettes entre la géométrie superficielle à deux dimensions et celle qui exige des considérations radiales vers un espace extérieur à trois dimensions en lequel on peut ne pas encore trouver la clef de toutes choses. C'est pourquoi il faut apprendre à être général et voir finalement tout cela dans un fort intéressant symbolisme à n variables. La fin du livre est remarquablement française avec les correspondances de Laplace et les cycles de surfaces de Darboux. L'auteur nous donne même de suggestifs croquis que nos géomètres semblent avoir dédaignés. Puissent de telles constatations nous faire devenir un peu plus tensorialistes et montrer que le point de vue nouveau n'est nullement une logique abstraite ennemie de l'intuition et de la faculté de *voir*.

A. Buhl (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8°, avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

Ces fascicules sont simplement analysés dans l'ordre où nous les recevons. Les lacunes, évidentes d'après le numérotage, dont dues, au moins partiellement, à des retards imputables à certains auteurs. Elles n'entraînent pas de véritables discontinuités d'exposition, les sujets étant généralement indépendants et débattus suivant les exigences de l'actualité. Il faut observer aussi que certains numéros omis correspondent à des sujets non mathématiques.

161. — Federigo Enriques. *Signification de l'Histoire de la Pensée scientifique* (Philosophie et Histoire de la Pensée scientifique. Direction F. Enriques. 68 pages. 1934. Prix: 12 francs). — Ce beau fascicule met en relief l'importance de l'Histoire où l'on peut trouver tant de thèmes propres à défendre l'idéal des savants qui ont connu et peuvent connaître encore des luttes ardues, des déboires, des sacrifices, des persécutions. Belle page sur les « simulacres de pensée » correspondant à ce qui n'a pas de sens. Autre passage curieux sur le cas où le sens logique s'embrume d'affectivité (p. 20) heureusement corrigé (p. 34) par cette remarque que l'effort vers la vérité ne saurait se concevoir hors de toute liaison avec les sentiments. L'histoire de la Science constitue un drame dont l'intérêt humain n'a pas d'égal (p. 37). Reste à savoir comment on doit construire l'Histoire. Pierre Duhem, à cet égard, ne plaît guère à M. Enriques; il dépensa un talent indéniable « dans l'intention ferme de diminuer Galilée et de justifier, sur le terrain de l'histoire, la sentence des inquisiteurs qui l'ont condamné » (p. 57). D'ailleurs Maxwell a du génie (p. 27) et on aurait pu ajouter que c'est une chose qui fût aussi contestée par Duhem. Mais il faut lire, entièrement et attentivement, tout l'exposé pour en saisir la très haute signification.

172. — Rudolf Carnap. *La Science et la Métaphysique devant l'analyse logique du langage* (Introduction de M. Marcel Boll. 45 pages. 1934. Prix: 10 francs). — Ceci me plaît beaucoup moins. L'auteur part en guerre contre

la Métaphysique tout à fait à la manière de Le Dantec. Art vide, si c'est de l'art. Il conclut (p. 44) que *les métaphysiciens sont des musiciens sans don musical.* Il donne des exemples de constructions verbales sans valeur mais il ne s'ensuit pas que toutes les constructions métaphysiques en soient forcément dépourvues. Il a toujours été entendu que la Philosophie se divisait en Logique, Métaphysique et Morale. Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'amputer cette trilogie. Quelques petits recours à la notation logistique ne réussissent point à entraîner ma conviction.

173. — Paul RENAUD. *Structure de la Pensée et Définitions expérimentales* (Philosophie des Sciences. Directeur L. de Broglie. 24 pages. 1934. Prix: 7 francs). — Œuvre brève mais extrêmement curieuse et intéressante d'un chimiste qui observe et décrit, dans le monde des réactions ne faisant point intervenir les structures intra-atomiques, des effets de « structure fine » avec incertitudes à la Heisenberg. Le déterminisme classique se traduit par des courbes sans structure fine et que l'on suppose cependant formées de points sans dimensions. La formation de toutes nos pensées relève d'un déterminisme ponctuel ancestral. A cet état de choses l'auteur oppose les « cellules de connaissance » où les points géométriques ne sont pas discernables. On arrive ainsi à créer un tout cohérent où rien cependant n'est défini de façon absolue; les *mesures* n'y sont possibles qu'en deçà de certaines régions de subtilité. Certes nous commençons à nous habituer à de telles conclusions dans le domaine corpusculaire mais ici il n'est pas nécessaire d'être dans ce domaine. On a souvent cherché inconsciemment à se représenter le corpusculaire à l'aide d'images empruntées à des échelles plus ordinaires. M. Paul Renaud semble tenter l'inverse et avec une ingéniosité qui mérite le succès.

188. — L. LUSTERNIK et L. SCHNIRELMANN. *Méthodes topologiques dans les Problèmes variationnels.* Première partie. Espaces à un nombre fini de dimensions (Analyse mathématique et applications. Direction J. Hadamard. 52 pages. 1934. Prix: 15 francs). — Traduction, par J. Kravtchenko, de travaux topologiques relatifs au Calcul des variations « in the large » développé récemment par M. Marston Morse. Voir *L'Enseignement mathématique*, fascicule précédent. L'origine de ces considérations remonte à Poincaré qui a d'abord été continué par Birkhoff. Il faut commencer par les ensembles selon Hausdorff et les espaces abstraits selon Fréchet. Digressions intéressantes sur les Espaces de Riemann ainsi rapprochés de ceux de Hilbert. Remarquons que cela unit la Gravifique aux Théories ondulatoires.

Les extrema des fonctions définies sur une multiplicité ne vont point sans la notion de catégorie d'un ensemble fermé par rapport à l'espace qui le contient. La considération du tore l'éclaire aisément. D'autres figures, du type rectangulaire, jouent un rôle analogue. Travaux A. Veblen et L. Pontrjagin repris avec toute la jeunesse des auteurs, jeunesse à laquelle M. Hadamard a rendu éloquemment hommage en une Préface de quelques lignes.

195. — Richard BRAUER. *Ueber die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques

Herbrand. 15 pages. 1935. Prix: 6 francs). — Les applications spectrales ont remis à la mode la représentation des groupes par des groupes linéaires ou par des matrices dont les éléments semblent d'abord devoir être des nombres complexes quelconques. La question est de faire rentrer ces éléments dans certains champs algébriques au moyen, s'il est nécessaire, de quelque nouvelle transformation. Il faut aboutir ici à des champs de Galois, ce qui tient en quelques pages à l'aide d'une formulation très simple. Travaux de Frobenius, Dickson, Speiser, Cartan, Schur, ...; Jacques Herbrand s'était déjà attaqué à des problèmes plus difficiles.

197. — S. Iyanaga. *Sur les classes d'idéaux dans les corps quadratiques* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. 13 pages. 1935. Prix: 5 francs). — Cette étude rend peut-être hommage à la mémoire de Jacques Herbrand plus directement que la précédente. Elle prolonge un travail du jeune et regretté géomètre, *Sur la théorie des groupes de décomposition d'inertie et de ramification*, publié au *Journal de Mathématiques* en 1931 et un autre de L. Rédei datant de la même époque. Naturellement, comme fond de tableau, il faut surtout citer Hilbert.

198. — Henri Cartan. *Sur les Groupes de Transformations analytiques* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. 56 pages. 1935. Prix: 14 francs). — M. Henri Cartan est le digne fils de M. Elie Cartan; il reprend les théories paternelles avec une aisance presque déconcertante dans un sens qui, à vrai dire, est déjà plus qu'indiqué dans les travaux de l'illustre père. Mais le progrès est le progrès et il a des formes qui auraient, sans doute, bien étonné Sophus Lie. Ce dernier partait de l'idée de transformation; les domaines où jouaient les transformations s'observaient après coup. M. Elie Cartan étudia les espaces (paramétriques) de groupes. Avec M. Henri Cartan tout est pour le *domaine* considéré comme notion primordiale. Le groupe y naît *localement* avant d'exister *globalement* et le *local* c'est le voisinage de la transformation identique dont Lie, inconsciemment, ne s'écartait guère. Les transformations infinitésimales correspondent ici au *système* d'équations différentielles

$$\frac{dM}{dt} = \psi(M)$$

avec ψ analytique. Ceci me paraît pouvoir être considéré comme une généralisation des opérateurs X habituels ou encore du système

$$\frac{d\xi^i}{dt} = A^i_k \xi^k \quad \text{avec} \quad A^i_k = -c^i_{ks} \lambda^s ,$$

système dont je suis parti dans mon fascicule 33 du *Mémorial* (voir *L'Ens. mathématique*, t. 27, 1928, p. 341). On voit que, dans les constructions abstraites de M. Henri Cartan, on peut retrouver des formes de jadis mais l'abstraction a ici une puissance synthétique qu'on ne reconnaît pas dans les trois énormes volumes de Lie. Le système précédent, en d M, permet donc de parler un langage analogue à celui de Lie, notamment quant aux combinaisons linéaires de transformations infinitésimales et quant à leur

crochet. D'ailleurs le jeune et brillant auteur étudie nettement la condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe de transformations *analytiques* soit un groupe de Lie. Il a fallu aussi étendre la notion de continuité, tout en précisant celle d'analyticité, pour dire, par exemple (p. 42) que: *Tout groupe quasi-continu de transformations pseudo-conformes est un groupe de Lie*. Les abstractions n'empêchent pas le recours éventuel à des images géométriques, telles celles de *polycylindres*, qui illustrent élégamment les dernières pages du fascicule. Au total, celui-ci est d'une lecture relativement facile.

Ces lignes étaient à peine écrites que j'avais connaissance d'un Mémoire d'une cinquantaine de pages *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de* n *variables complexes* publié, par M. Elie Cartan, aux *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* (Band 11, 1935). Dans ce travail, l'auteur reprend tout particulièrement les recherches de son fils mais avec les notations anciennes et plus habituelles des transformations infinitésimales. Les constantes de structure c_{ks}^{i} sont, de même, explicitement introduites. Il y a là un exemple de collaboration familiale aussi rare qu'admirable.

205. — Reinhold Baer. *Automorphismen von Erweiterungsgruppen* (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. 22 pages. 1935. Prix: 7 francs). — Il me semble que ce fascicule peut être rattaché assez aisément au numéro 195. Il s'agit toujours de la représentation des groupes qui persiste ou non à jouer pour certains prolongements de ceux-ci. Dans quels cas le jeu continue-t-il ? Le problème implique la considération de « Normalteiler » identiques ou comparables à des sous-groupes invariants. La question est, à coup sûr, très moderne et se rattache aux travaux de O. Schreier, A. Speiser, I. Schur, sans oublier ceux de M. Baer lui-même. A signaler aussi, dans toutes ces considérations, le rôle important dû à la notion de « caractère ». Bien que, dans un tel fascicule il ne soit question, nulle part, de Physique, il me semble toujours certain que le sujet n'aurait pas pris tant d'importance sans des exposés de Mécanique quantique tels celui de Wigner (voir *L'Ens. mathématique*, t. 30, 1931, p. 164). La microphysique a de formidables répercussions purement mathématiques.

219. — G. Bouligand, G. Giraud, P. Delens. *Le Problème de la Dérivée oblique en Théorie du Potentiel* (Exposés de Géométrie. Direction E. Cartan; 78 pages, 1935. Prix: 18 francs). — Le problème se présente tout naturellement après ceux de Dirichlet et de Neumann. Il est toutefois susceptible de modalités expliquant la triple collaboration qui intervient ici. Avec M. Bouligand nous sommes dans l'analyse fonctionnelle à la Hilbert avec association symétrique d'un problème adjoint, association qui est loin d'être particulière à la question. Au fond, on étend des méthodes matricielles dans le domaine du continu.

Avec M. Giraud, nous sommes encore dans le monde des équations fonctionnelles mais avec utilisation de la notion de *valeur principale* d'intégrales doubles. Cette notion, due à Cauchy pour les intégrales simples, tend à devenir un véritable monde pour les intégrales multiples; elle a différents aspects développés dans les *Annales de l'Ecole Normale* (1934) et ici même

par une méthode nouvelle qui s'accorde d'ailleurs fort élégamment avec le point de vue hilbertien déjà mentionné.

Avec M. Delens nous sommes dans les *congruences équipotentielles* de M. Levi-Civita. Ces congruences peuvent emplir un espace harmonique, chaque canal de la congruence portant des valeurs données. Il ne faut pas oublier que ces congruences sont spéciales mais elles interviennent de façon suffisamment générale pour donner un aspect nouveau et très intéressant au Problème de la dérivée oblique. D'ailleurs il me semble toujours que les plus grandes généralités de la Physique théorique pourraient être retrouvées en l'association d'équations du type

$$\frac{\partial}{\partial x}F + \frac{\partial}{\partial y}G + \frac{\partial}{\partial z}H = 0 , \qquad F\frac{\partial}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial y} + H\frac{\partial}{\partial z} = 0 .$$

Simple permutation d'opérateurs qui fait passer de l'équation fondamentale de la Physique théorique à la Théorie des congruences.

A. Buhl (Toulouse).

G. Bouligand. — **Géométrie infinitésimale directe et Physique mathématique classique.** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat, fasc. LXXXI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

Beau fascicule empli de vues philosophiques actuelles et prolongeant d'abord la G.I.D. conformément, par exemple, aux travaux de Fréchet, Durand, Rabaté. Les problèmes de la Physique mathématique mettent les anciennes conceptions à une rude épreuve; il y en a même qui semblent n'y point résister. La dérivation est bien loin d'avoir la plasticité de l'intégration; l'analyticité n'est plus une pierre de touche fondamentale. Certains raisonnements très logiques et même imposés par la nature physique des choses font construire, pour vérifier des équations *aux dérivées partielles*, des solutions qui ne sont plus *dérivables*. Or ce ne sont point de telles solutions qui ont tort mais l'ancienne idée de dérivation et de tangence. On est amené à des intégrations *contingentes*, à de nouveaux concepts concernant la causalité à inféoder à des ensembles, à des groupes en lesquels la continuité semble pouvoir se disséquer et se résoudre en une foule de notions nouvelles.

La théorie des surfaces peut conduire à des *microstructures*, à des représentations *fines* qu'on ne peut plus imager avec des ensembles de plans tangents; il y faudra les ressources du monde ensembliste. Les rudimentaires théorèmes de Meusnier et d'Euler, le théorème de Dupin sur les surfaces triplement orthogonales prennent alors des physionomies subtiles non prévues, à coup sûr, par les créateurs.

Tout cela provient surtout du prolongement (pas du tout analytique) de la notion d'infiniment petit *physique*. L'idée de démonstration *causale* peut impliquer des *conditions catastrophiques* où le matériel d'abord mis en jeu apparaît tout à coup comme hors d'usage; c'est d'ailleurs le cas signalé plus haut avec les équations aux dérivées partielles à solutions non dérivables.

Ces quelques réflexions sont faites au hasard et non dans l'ordre adopté par M. Bouligand. Je pense toutefois qu'elles suffiront à faire pressentir le prodigieux intérêt de l'exposé. A. Buhl (Toulouse).

J. Le Roux. — **Principes et Méthodes de la Mécanique invariante.** — Un volume gr. in-8° de vi-112 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1934.

Ce livre me paraît pavé de bonnes intentions et on y trouve nombre de choses ingénieuses. Malheureusement pour l'auteur, les conclusions n'entraîneront pas, je crois, beaucoup de convictions. Il y a d'abord un mérite indéniable à vouloir s'appuyer sur Henri Poincaré; de ce côté il n'y a sûrement ni temps ni espace absolus alors qu'avec Einstein on admettrait un absolu riemanien ! Il me semble que la multiplicité des ds^2 phénoménaux suffit à montrer qu'il n'en est rien. Mais *l'ensemble* de ces ds^2 serait encore un absolu. Soit. Mais on ne fait pas tout avec de l'einsteinisme; le recours plus récent aux espaces de Hilbert le prouve, ce qui n'empêche pas qu'on peut très raisonnablement travailler à de très importantes catégories de phénomènes einsteiniens.

Un point où j'approuve l'auteur concerne le rôle paramétrique des groupes; la signification temporelle des paramètres est parfois objet de confusion.

Pour les conclusions gravitationnelles nous en sommes toujours à des errements qui me semblent caractérisés par une Note aux *Comptes rendus* datant de 1922. Je croyais bien que M. Le Roux s'était amendé sur ce point et le présent ouvrage me prouve qu'il n'en est rien. L'effet Einstein relatif au périhélie de Mercure ne pourrait se superposer à une théorie newtonienne. Il est bien certain qu'il y a là une cote mal taillée au point de vue strictement logique. Mais elle n'est pas différente de la cote, également mal taillée, constituée par la réunion additive de perturbations planétaires d'origines diverses. Le prétendu casse-cou, signalé en 1922, n'a pas influencé grand monde et, très probablement, il est signalé tout à fait en vain.

Concédons à M. Le Roux beaucoup de courage. A son âge, bien d'autres ne veulent plus connaître que le repos de la retraite. Toutefois ses constructions sont trop empreintes du désir de détruire.

Signalons aussi que tout le monde n'est peut-être pas aussi sévère. Ainsi l'ouvrage de M. Le Roux est cité dans celui que M. Bouligand vient de consacrer aux groupes et qui est analysé ci-dessus. Or c'est un éloge de grand prix que d'être cité par M. Bouligand !

Et puis l'invariance est chose fondamentale. Elle doit régner en mécanique comme ailleurs. Nous ne devons point blâmer M. le Roux d'avoir voulu nous le rappeler. A. Buhl (Toulouse).

J. B. Tourriol. — **Chaleur** (Cours de Physique. Classes de Mathématiques spéciales). — Un volume gr. in-8° de 304 pages et 128 figures. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

M. J.-B. Tourriol, Professeur au Lycée Saint-Louis, a déjà publié une *Optique géométrique* dont nous avons rendu compte (voir t. précédent, p. 123).

Les projets de l'auteur semblent maintenant s'élargir et devoir aboutir à la publication de tout un Cours qui serait celui des Classes de Mathématiques spéciales. Quoiqu'il en soit, voici un nouveau volume, relatif à la Chaleur, qu'on peut considérer comme une excellente introduction à la Thermodynamique. Le livre précédent ne présentait point l'optique sans une Préface, due à M. Ch. Fabry, qui signalait les difficultés très réelles que rencontrait un tel enseignement dans une classe où les élèves ne connaissent encore que très imparfaitement la géométrie infinitésimale. Ici rien de semblable. Les principes du Calcul infinitésimal suffisent. L'homogénéité géométrique s'étend, se complète avec les discussions d'unités; les erreurs, les méthodes variationnelles en herbe ne relèvent que de différentiations totales. Le point de vue physique apparaît également de manière remarquable avec beaucoup de figures se rapportant à des expériences de laboratoire et le tout se lisant de manière si claire et si bien enchaînée qu'on en vient à voir là un véritable Traité fort intéressant en lui-même en dépit de la limitation due aux programmes.

Chaleur et travail, théorème de Carnot, loi de Mariotte et extensions du type $pv = rT$, loi de Dalton, avec la notion de masse moléculaire apparente d'un mélange, sont naturellement chose fondamentales. L'isothermie avec ses élégants graphiques, la surface caractéristique du fluide (fig. 24), l'équation de Van der Waals, avec ses nécessaires compléments, conduisent aux états correspondants.

Les difficultés de la thermométrie, dont certaines naturellement très grandes, sont, du moins, bien localisées par l'étude des thermomètres à gaz, notamment du thermomètre à hydrogène. Les sciences thermométriques et calorimétriques présentent d'ailleurs un caractère légal qui semble retenir grandement l'attention; les bureaux internationaux d'étalonnage sont, on le sait, des laboratoires de premier ordre. A propos des changements d'état, les équilibres, la célèbre règle des phases ou théorème de Gibbs nous mènent à la fois dans des considérations théoriques particulièrement remarquables et dans des procédés industriels de liquéfaction. La sublimation, la surfusion donnent d'intéressants graphiques; les solutions ne sont pas moins riches. On sait encore qu'elles reproduisent la thermodynamique des gaz, qu'elles donnent la tonométrie et la cryoscopie de Raoult, nom français glorieusement lié à ceux de Van't Hoff et d'Arrhenius.

Toutes ces belles choses ne sont pas nouvelles; elles étaient déjà largement dessinées au début du siècle et l'enseignement des classes de spéciales ne vise pas encore à la nouveauté. Mais l'auteur a indéniablement présenté le classicisme dans un esprit d'application tout à fait moderne. Attendons-nous à de nouveaux volumes complétant, dans le même esprit, un excellent Cours de Physique. A. Buhl (Toulouse).

Henri Tripier. — **Les Logarithmes et les Puissances en partant de l'hyperbole.** — Un volume in-8° de viii-50 pages et 19 figures. Prix: 8 fr. Vuibert, Paris, 1934.

Le titre de cet opuscule dit suffisamment ce dont il s'agit. La tentative n'est pas sans précédents; l'auteur cite MM. Fl. Leroy, Em. Borel, J. Guadet, Duhamel, J. W. Bradshaw, auxquels on pourrait ajouter H. Bouasse et quelques autres.

De toutes façons, le sujet ne semble pas pouvoir être débarrassé complètement de toute difficulté On le voit ici quand il faut développer e^x en série entière; on s'appuie sur la formule de Maclaurin dont il faut donner alors une démontration dans une note placée à la fin de l'exposé. Cela vaut-il mieux qu'une autre filiation ? Quoiqu'il en soit l'hyperbole équilatère mérite bien d'être prise en considération. La tentative de M. Tripier me rappelle une *Etude de l'hyperbole équilatère* publiée en 1927 (à la même librairie) par M. J. Lemaire. C'est très différent; il est alors question de géométrie (voir *L'Ens. mathématique*, 26e année, 1927, p. 166). Mais il est remarquable que la courbe puisse servir à amorcer l'Analyse et une géométrie fort étendue pleine de curiosités généralement inconnues. Qui sait que le rayon de courbure est moitié de la normale limitée à la courbe ? Il y a comme cela beaucoup d'autres simplicités dont il reste à profiter. A. Buhl (Toulouse).

D. Hilbert u. P. Bernays. — **Grundlagen der Mathematik.** Erster Band (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, B. LX). — Un vol. in-8° de 471 p., broché RM. 36. Julius Springer, Berlin 1934.

Voici, rédigée par M. P. Bernays, la première et déjà volumineuse partie de l'ouvrage sur les Fondements des Mathématiques qui doit exposer les vues de l'école formaliste, des débuts jusqu'aux résultats les plus actuels. Dans l'espoir — dit M. Hilbert dans une courte Préface — de reconnaître finalement que les méthodes traditionnelles et habituelles des mathématiques, individuellement et dans leur ensemble, ne peuvent impliquer de contradiction.

La publication de cet ouvrage a été retardée et son volume notablement accru du fait des résultats de Herbrand et de Gödel, qui ont créé une situation nouvelle dont il a fallu tenir compte.

Les §§ 1 et 2 introduisent le lecteur dans les problèmes de la non-contradiction d'un système d'axiomes et de la décision dans un champ logique (Entscheidungsproblem). En particulier, le second paragraphe contient une délimitation de ce qu'il faut entendre par « finit », « finites Schliessen » et « finiter Standpunkt », notions qui, on le sait, sont à la base de la doctrine hilbertienne (p. 32). L'auteur donne quelques exemples de « raisonnements concrets » conformes à sa délimitation; il indique ensuite certains points où le raisonnement mathématique déborde le domaine du « concret immédiat » (finit !). Les difficultés qui se présentent alors dans l'appréciation de la négation d'un jugement général ou d'une affirmation d'existence sont confrontées avec les réserves de Brouwer concernant l'application du principe du tiers exclu.

Les §§ 3, 4 et 5 sont consacrés à l'exposition de la logique formelle. Le § 3 reprend le problème de la formalisation des règles de la logique et du raisonnement à ses débuts, et nous conduit jusqu'à la logique des prédicats. Le § 4 s'occupe de la formalisation de celle-ci. Les deux notions: identiquement juste dans un champ à k éléments (k- zahlig identisch) et identiquement juste dans un champ fini (im Endlichen identisch) conduisent à une démonstration de l'absence de contradiction dans le calcul des prédicats. Les deux notions de la transmutabilité (Ueberführbarkeit) et de l'équiva-

lence déductive (Deduktionsgleichheit) interviennent dans la réduction des expressions à une forme normale. Le § 5 élargit le calcul des prédicats par l'introduction des axiomes de l'identité et résout l'Entscheidungsproblem dans quelques cas plus ou moins spéciaux.

Avec le § 6 nous entrons dans le cercle des questions qui forment le fond de la discussion actuelle sur les fondements. Un système de 5 axiomes, concernant la relation $a < b$ et la relation « du précédent au suivant » est maintenant introduit, et l'absence de contradiction démontrée par la méthode de réduction de Herbrand et Pressburger. Ce système fait ensuite place à un système (A) de 7 axiomes, dont le principe d'induction ne peut pas être déduit. Celui-ci sera introduit dans le système (B), dont découle alors le « principe du plus petit nombre ». Les conclusions restent toutefois en suspens dans les cas où intervient au moins une « variable-formule ». Le système (B) ne suffit pas pour fonder l'arithmétique. Sous sa forme récursive », celle-ci fait l'objet du § 7. Il se révèle nécessaire d'y introduire successivement les axiomes de l'addition (D) puis ceux de la multiplication (Z). Ce dernier système embrasse toute l'arithmétique, mais la méthode de réduction ne lui est plus applicable. Le § 8 enfin est consacré à l'introduction du symbole iota et à son élimination.

Le problème de l'absence de contradiction dans le système (Z) et les questions attenantes sont renvoyés au second volume.

Ce livre dresse un monument imposant bien qu'encore incomplet, à la doctrine de l'école hilbertienne. Et les réserves qu'on est tenté de formuler s'adressent, non pas à l'ouvrage en lui-même, dont il faut louer à la fois l'exactitude, la clarté et l'ampleur inégalée de la documentation — mais à cette doctrine elle-même. Les notions mêmes de raisonnement dans le concret » (finites Schliessen), de système purement formel (Formalismus) et de la démonstration elle-même (Beweisverfahren) nous paraissent susceptibles d'une analyse plus approfondie. Nous croyons que les résultats de cette analyse pourraient être de nature à affaiblir la force démonstrative de telle ou telle démonstration de non-contradiction.... Mais ceci ne doit pas nous empêcher de sincèrement admirer l'effort dont l'ouvrage dont nous parlons est l'éloquent témoignage. F. Gonseth (Zurich).

Rudolf Carnap. — **Logische Syntax der Sprache.** (Schriften zur Wissenschaftlichen Weltauffassung. Band 8). — Un volume p.-8° de 274 pages; broché RM 21,80; Julius Springer in Wien.

Le livre « Logische Syntax der Sprache » est de M. Carnap, l'un des plus éminents représentants de l'école néo-positiviste de Vienne. Il a pour but de faire la théorie de la logique comme ensemble de propriétés du langage.

La syntaxe logique est l'étude des phrases d'un certain langage au point de vue *formel*, c'est-à-dire l'étude de la formation et des transformations licites de ces phrases en faisant abstraction de leur signification. On sait que les exigences de la rigueur mathématique, puis les théories sur les fondements des diverses sciences, ont montré la nécessité absolue de « formaliser » les connaissances, c'est-à-dire de raisonner au moyen de règles définies, sans faire appel à l'intuition directe des objets du raisonnement. De semblables raisonnements se font sur des phrases, non sur des

notions; les règles auxquelles ils sont soumis se rapportent donc à la composition des phrases au moyen de mots ou de lettres et de signes de ponctuation, etc.

Cependant une étude syntactique exacte du langage courant présenterait des difficultés pratiquement insurmontables. C'est pourquoi il vaut mieux analyser le langage logique, infiniment mieux adapté au travail scientifique (pas seulement mathématique d'ailleurs; il me semble que l'emploi des signes logistiques dans les diverses branches du savoir, même les moins mathématisées, y apporterait une clarté supplémentaire qui rachèterait de loin les quelques difficultés momentanées de lecture).

Les deux premiers problèmes qui se posent en syntaxe logique sont: 1° de déterminer les phrases qui ont un sens, 2° de préciser les modalités de transformation des phrases, par lesquelles on peut déduire les phrases les unes des autres. Les solutions de ces problèmes sont données: 1° par les « Formbestimmungen », 2° par les « Folgestimmungen ».

Ces solutions dépendent naturellement du langage qu'on analyse. Cependant, en règle générale, les « Formbestimmungen » procèdent par une analyse récurrente des figures formées de signes du langage; autrement dit on ramène la question de savoir si tel assemblage de signes donné est une proposition (une expression numérique, etc.) à la condition de savoir si une certaine partie de cet assemblage est lui-même une proposition (ou une expression numérique, etc.). Il s'agit là d'une méthode classique, que Herbrand, a très heureusement désignée sous le nom de « récurrence finie » et qu'il faut soigneusement distinguer de la « récurrence ordinaire ».

Quant aux « Folgebestimmungen », l'auteur introduit une distinction, fort importante, entre les « déductions » (« Ableitung ») et les « conséquences » (« Folge »). Les déductions correspondent aux règles de raisonnement habituelles de la logique. On y distingue la déduction immédiate qui est un passage d'une prémisse, jointe aux théorèmes de base (« Grundsätze »), à une conséquence, au moyen de règles de raisonnement (qui peuvent être envisagées, soit comme fixant les opérations que l'on a le droit de faire, soit comme donnant une définition de la déductibilité), et la déduction qui est une suite finie de déductions immédiates. L'auteur définit une démonstration comme étant une déduction sans prémisse (n'oublions pas que les théorèmes de base sont en quelque sorte inclus dans le langage lui-même). Les théorèmes démontrables (conclusions de démonstrations) sont les « propositions vraies » des logiques mathématiques ordinaires.

Par contre la classe des « conséquences » est beaucoup plus vaste. Il est bien connu depuis les travaux de Gödel, qu'il existe en arithmétique des propositions $P(x)$ telles que pour tout nombre particulier a, $P(a)$ soit démontrable, sans que la proposition $P(x)$ soit elle-même démontrable. C'est pour inclure de semblables propositions parmi les propositions vraies, que l'auteur introduit la notion de conséquence d'un ensemble de propositions: si un certain ensemble de propositions est tel qu'il contienne toutes les propositions $P(a)$, a désignant les nombres entiers, ou que $P(x)$ puisse se déduire de certaines propositions de l'ensemble, on dira que $P(x)$ est conséquence immédiate de ce système de propositions. On passe facilement de là à la notion de conséquence médiate.

Les propositions que l'on peut ainsi obtenir au moyen de « conséquences » sont dites *analytiques*. Les propositions telles que toute autre proposition en soit conséquence sont dites « contradictoires ».

L'auteur analyse en particulier deux types de langages, qu'il désigne par I et II, dont le premier correspond à l'arithmétique finitiste et le second comprend les mathématiques tout entières, y compris « l'axiome de choix ». La notion de conséquence que nous venons d'exposer est celle qui se rapporte au langage I. L'auteur annonce, sans la donner explicitement, qu'il possède une définition de la « conséquence » dans le langage II qui lui permet de démontrer que toute proposition mathématique est analytique ou contradictoire (démonstration qui ne se conduit naturellement pas par des moyens finis au sens de Hilbert).

L'analyse logique du langage I est faite d'une manière arithmétique. Pour cela, suivant la méthode de Gödel, on fait correspondre à tous les signes logiques certains nombres entiers, de manière qu'à toute formule écrite avec les signes du langage I corresponde d'une manière bien déterminée un entier (l'analyse de cet entier, notamment sa décomposition en facteurs premiers, permet de retrouver la formule). Les règles de déduction peuvent être alors données sous forme de définitions purement arithmétiques. La traduction ainsi définie de la syntaxe du langage I est effectuée complètement par l'auteur. Le résultat de cette traduction est la formalisation de la syntaxe de I dans le langage de I.

De même on peut formaliser la syntaxe de II dans le langage de II. L'auteur montre que le langage II contient des théorèmes non-démontrables et par suite est non-contradictoire.

Après ces considérations relatives à des langages particuliers, l'auteur donne des définitions qui peuvent s'appliquer à tous les langages dans lesquels ont été définies des « Formbestimmungen » et des « Folgebestimmungen ». Il s'agit ici, à partir de la structure formelle de ces « Bestimmungen », de définir les divers termes logiques. Il est remarquable que l'on arrive ainsi à délimiter formellement des notions qui semblent faire appel à la signification des signes du langage.

Nous ne pouvons donner ici toute la liste des définitions introduites par l'auteur. Signalons cependant que l'on peut distinguer les langages *logiques* (L-Sprache), de ceux qui contiennent des assertions de nature physique, et que tout langage contient un sous-langage logique maximum. Ceci permet de distinguer entre propositions *valables* (gültig) et *analytiques*, les premières étant celles qui peuvent être obtenues par voix de conséquence, les secondes celles qui peuvent être obtenues dans le sous-langage logique contenu dans le langage considéré.

L'auteur traite également des traductions d'un langage dans un autre, c'est-à-dire des correspondances entre expressions de ces deux langages. Il n'y a naturellement d'intérêt qu'à considérer celles de ces traductions qui conservent les structures logiques (changent les propositions en propositions, etc...). Ces traductions peuvent être considérées comme des *significations* données à un langage.

A ce propos, l'auteur attache une grosse importance à certaines propositions qu'il appelle « quasi-syntactiques ». Ce sont celles qui, dans un certain langage, tout en étant formulées comme des affirmations sur les objets dont parle ce langage, sont en réalité des affirmations sur la structure des phrases mêmes du langage. Ce caractère de quasi-syntacticité se laisse d'ailleurs définir d'une manière formelle grâce à l'immersion possible du langage S_1 dans un autre langage S_2 qui contienne une syntaxe pour S_1.

Si une proposition quasi-syntactique porte sur un objet désigné par A_1

et que, traduit dans S_2, il donne une proposition se rapportant à l'expression « A_1 », elle peut, dans sa forme primitive, être considérée soit comme portant sur A_1 (qui se trouve jouer à la fois dans la même proposition le rôle d'objet et de signe, c'est-à-dire qui est désignation de soi-même), soit comme portant sur l'objet désigné par A_1. Ces deux points de vue peuvent encore se distinguer d'une manière formelle.

Dans le premier cas, on dit que la proposition appartient au mode de langage autonyme, dans le second cas qu'elle appartient au mode informatoire (mauvaise traduction de « inhaltlich »). Or, les phrases quasi-syntactiques du mode informatoire ont fort souvent l'apparence d'affirmations positives sur les objets; et cette apparence prête à des discussions souvent stériles qui ne s'éclairent que par la compréhension du fait que les points discutés se réfèrent à un langage particulier, hors la donnée duquel ils ne sauraient avoir de sens.

La reconnaissance du caractère quasi-syntactique de la plupart des phrases, sur lesquelles des discussions s'éternisent depuis des années ou des siècles, conduit l'auteur à penser que la philosophie des sciences consiste essentiellement en une analyse syntactique des divers langages scientifiques. Toutes les questions philosophiques qui ne se traduisent pas ainsi en questions techniques sur les formalismes des diverses sciences lui paraissent illusoires, et généralement mal posées par suite d'un emploi abusif du mode informatoire du langage pour formuler des propositions quasi-syntactiques. Inversement l'auteur montre que, dans la théorie de la syntaxe, se posent des questions bien définies (étude des fondements, unicité de la science, etc...), lesquelles héritent généralement de ce qu'il y avait de solide dans les questions que l'on posait jusque-là en termes vagues de philosophie générale.

En somme, le livre de M. Carnap se recommande à bien des points de vue. Tout d'abord celui qui aurait encore peu de connaissances en logique mathématique pourrait y trouver, expliqués avec grand soin, les fondements d'une mathématique intuitionniste (Langage I), comparée à ceux d'une mathématique qui ne l'est pas. D'autre part la formalisation de la syntaxe de I dans II est complètement donnée, avec des notes explicatives qui expliquent en langage courant le sens des définitions logiques, sous forme arithmétique, qui sont posées.

Toute la seconde partie (définitions relatives à une logique quelconque) est fort utile à qui veut, dans chaque science, comprendre avec clarté les démarches de l'esprit humain. De plus le chercheur y trouvera une masse de suggestions qui orienteront ses recherches dans des voies certainement neuves et probablement très fécondes.

Enfin la troisième partie (Syntaxe et philosophie) est précieuse pour le philosophe: elle lui montre que les systèmes philosophiques, dans la mesure où ils prennent une forme sinon dogmatique, du moins intellectuelle, tombent, à juste droit, sous le coup de la critique des logiciens, critique plus que tout autre implacable, parce que ne portant que sur la forme, nullement sur *ce* qui est affirmé. Une telle critique sera, espérons-nous, fatale à cette forme de philosophie qui semblait avoir pour ambition de fuir devant la vie et le concret, de se réfugier dans un intellectualisme plus ou moins pur; déjà ébranlée par un mouvement comme le bergsonisme, qui lui demandait compte de *ce* dont elle ne parlait pas, elle perd toute

viabilité devant une critique de logiciens, venant lui demander compte de la *manière* dont elle parle. C. CHEVALLEY (Paris).

G. LORIA. — **Metodi Matematici.** Essenza. Tecnica. Applicazioni. (Manuali Hoepli). — Un vol. in-16 de xv-276 pages avec 51 figures dans le texte, relié L. 20; Ulrico Hoepli, Milan, 1935.

Dans ce nouveau volume de la Collection Hoepli, le savant professeur de l'Université de Gênes initie le débutant aux principales méthodes mathématiques. Accessible à ceux qui ne possèdent que les mathématiques élémentaires, son exposé montre, à l'aide d'exemples choisis dans les différents domaines des mathématiques, quels sont les types de raisonnements auxquels on peut avoir recours.

L'ouvrage est divisé en trois parties. La première traite des méthodes d'un caractère général: Analyse et synthèse. — Réduction à l'absurde. — Induction complète. — Logique mathématique. — Le rôle de l'analogie. — Généralisation.

La seconde partie est consacrée aux méthodes se rapportant aux questions de géométrie: La construction comme méthode de démonstration; les polyèdres réguliers. — Sur un type de raisonnements relatifs au triangle. — Problèmes du 1er et du 2me degré relatifs à la droite et au cercle. — Constructions; rectification. — Géométrie projective. — Géométrie descriptive. — Emploi des coordonnées; géométrie analytique. — Méthodes de recherches en usage en géométrie algébrique.

Dans une dernière partie viennent les méthodes particulières à la science des nombres: Théorie des nombres. — Algèbre. — Méthodes introduites au XVIIe siècle; le concept de l'infini; le passage à la limite. — Analyse infinitésimale.

Il n'est guère besoin d'ajouter que l'on retrouve dans ce petit volume les excellentes qualités qui caractérisent tous les ouvrages de l'illustre géomètre italien.

H. FEHR.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

W. LIETZMANN. — **Altes und Neues vom Kreis** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 87). — Un vol. in-16 de 47 p. et 52 fig., cart. RM 1,20; B. G. Teubner, Leipzig, 1935.

F. SCHILLING. — **Die Pseudosphäre und die Nichteuklidische Geometrie.** I. Teil: **Die geodätischen Linien der Pdeusosphäre und deren Umwelt.** Zweite erweiterte Auflage. Mit 64 Fig. u. Bildnistaf. — II. Teil: **Die geodätischen Kreise der Pseudosphäre und deren Umwelt.** Mit 78 Fig. u. 1 Figurentaf. — Un vol. in-8o de 215 p., relié, RM. 13,60; B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1935.