

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER

Autor(en): **Herrmann, Aloys**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26614

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

La construction de la droite T_b résulte de l'équation (4) analogiquement à la construction T_a (voir le théorème 10). Nous aurons:

$$T_b = (a, d, l, m) \times (e, l, a, b) \times (d \times e) \times m \times (a \times b) \times \\ \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b ,$$

où

$$l = (f, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (f \times a)$$
$$m = (g, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (g \times a)$$

après (1) du théorème 7.

Si nous posons partout x au lieu b, nous aurons la construction que nous avions à démontrer.

Prague, janvier 1935.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER

PAR

Aloys HERRMANN (Köthen in Anhalt).

Cette Note a pour but d'exposer une méthode qui fait voir qu'on peut étendre les recherches de SYLVESTER [1], *Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre.*

Soient A, B, C et X des matrices carrées d'ordre $n = 2$; il est démontré que chaque racine caractéristique d'une solution X de l'équation en matrices $AX^2 + BX + C = 0$ est une solution de l'équation algébrique de l'ordre 4 en λ, obtenue en annulant le déterminant $|A\lambda^2 + B\lambda + C|$. En outre, on a fait [2] plusieurs tentatives pour déterminer le nombre des solutions d'une équation en matrices d'ordre $n > 2$.

---

[1] SYLVESTER, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 99 (1884), p. 555-558 et 621-631.

[2] *Ibidem*, p. 13-15; *Phil. Mag.*, vol. 18 (1884), p. 454-458; *Quat. J. math.*, vol. 20 (1885), p. 305-312.

Il est bien connu [1] que pour une fonction holomorphe $g(z)$ dans une région B de connexion simple du plan des z et pour une matrice A, dont les racines z_j sont intérieures à B, $g(A)$ se laisse exprimer par $f_i(A)$, résidus de la résolvante $(\zeta E - A)^{-1}$ pour les pôles z_j de cette fonction-matrice de ζ, ce qui donne

$$g(A) = \sum_{j=1}^{m} f_j(A) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_j)(A - z_j)^{\nu} . \tag{1}$$

On peut se servir de cette formule pour établir les résultats sur les équations en matrices et je me contente ici de faire voir quelle est la marche pour déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu X^\nu = 0 ,$$

si $C_0 = E$ et C_ν sont des matrices de l'ordre n, d'où résulte immédiatement le théorème, concernant les racines caractéristiques des solutions.

Soient C_j des matrices à éléments constants et

$$Y^{(\sigma-j)}(x) = [y_{ik}(x)]^{(\sigma-j)}$$

la matrice, dont les éléments $y_{ik}^{(\sigma-j)}(x)$ sont des dérivées du $(\sigma - j)$ ordre des éléments de la matrice Y, nous considérons que

$$\sum_{j=0}^{\sigma} C_j X^{(\sigma-j)} = 0 , \qquad C_0 = E . \tag{2}$$

Substituant la fonction exponentielle

$$Y = \exp[(\tau_{ik})x] ,$$

avec (τ_{ik}) matrice de l'ordre n, on obtient une équation algébrique en matrices

$$\sum_{j=0}^{\sigma} C_j X^{\sigma-j} = 0 , \qquad C_0 = E \tag{3}$$

[1] Voir H. Schwerdtfeger, Sur une formule de H. Poincaré relative à la théorie des groupes de S. Lie, *L'Enseignement math.*, 33, 193, p. 304-319 et pour la formule (1) A. Herrmann, *Proc. Amsterdam*, 1935, vol. 38, p. 394-401.

pour la matrice (τ_{ik}), et nous dirons que l'équation (3) est l'équation *adjointe* de l'équation (2). Réciproquement on peut adjoindre à chaque équation de la forme (3) une équation de la forme (2).

Pour établir les matrices (τ_{ik}), il faut avoir égard au fait que $\exp\left[(\tau_{ik})\,x\right]$ se présente aussi comme solution d'une équation (2) de l'ordre $\sigma = 1$. On remplace (2) par une équation équivalente

$$\sum_{j=0}^{1} \overline{T}_j Z^{(\sigma-j)} = 0 \,, \qquad \overline{T}_0 = E \,, \qquad \overline{T}_1 = -(\overline{\tau}_{ik}) \,, \qquad (4)$$

où les matrices seront de l'ordre σn. On déduit de (1) la solution $\exp\left[(\overline{\tau}_{ik})\,x\right]$ de l'équation (4) et, de même, de la formule (1) pour la fonction exponentielle les solutions de (2) en résultent; c'est-à-dire, connaissant à cause de (4) les solutions de (2), nous pouvons déterminer les matrices (τ_{ik}). Le nombre des solutions dépend de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique pour $(\overline{\tau}_{ik})$, de laquelle la possibilité de former les matrices (τ_{ik}) résulte uniquement. Ces questions font l'objet d'une note publiée récemment par moi (loc. cit.). Pour voir que les racines caractéristiques d'une solution de l'équation (3) sont aussi des racines de

$$\left| \sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} \right| = 0 \,,$$

nous effectuons une décomposition de

$$\sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} \,.$$

Supposons que

$$A = \sum_{i=0}^{\nu} A_i \lambda^{\nu-i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=0}^{\mu} B_i \lambda^{\mu-i}$$

soient deux matrices et que $\mu < \nu$; il existe une et seulement une matrice $Q(\lambda)$ avec $R(\lambda)$ tel que

$$A = QB + R \,, \qquad (R(\lambda) \text{ en } \lambda \text{ de degré } < \mu) \,.$$

Si $R(\lambda) = 0$, B est diviseur-droit de A. Nous voulons soumettre $R(\lambda)$ à la restriction $B(\lambda) = \lambda E - X$. Si cette condition est réalisée, on a

$$A(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - X) + R$$

où R est une matrice, dont les éléments sont indépendants de λ. Si R s'annule, on a une décomposition $A = QB$, où B est un facteur-linéaire.

Soit A décomposé

$$A = \prod_{k=1}^{\nu} (\lambda E - X_k) \; ; \tag{5}$$

tenant compte de l'arrangement des facteurs, nous aurons

$$A = \sum_{i=0}^{\nu} S_i \lambda^{\nu-i} ,$$

et il résulte que X_1 est une solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{\nu} X^{\nu-i} S_i = 0 .$$

Donc

$$S_1 = -X_1 - (X_2 + \dots + X_\nu) ,$$

$$S_2 = X_1(X_2 + \dots + X_\nu) + (X_2X_3 + \dots + X_{\nu-1}X_\nu) ,$$

$$S_3 = -X_1(X_2X_3 + \dots + X_{\nu-1}X_\nu) - (X_2X_3X_4 + \dots + X_{\nu-2}X_{\nu-1}X_\nu) ,$$

. . . .

$$S_\nu = (-1)^\nu X_1 X_2 \dots X_\nu .$$

Ces équations donnent, si l'on les multiplie respectivement à gauche par $X_1^{\nu-1}$, $X_1^{\nu-2}$, ... X_1^0 et si l'on fait la somme

$$\sum_{i=0}^{\nu} X^{\nu-i} S_i = 0 .$$

Des considérations tout à fait analogues s'appliquent à X_ν, et on voit que X_ν est une solution de l'équation-gauche

$$\sum_{i=0}^{\nu} S_i X^{\nu-i} = 0 .$$

Par exemple

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ est une solution de l'équation-gauche}$$

$$f_1(X) = X^2 + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 ,$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ est une solution de l'équation-droite}$$

$$f_2(X) = X^2 + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et

$$f_1(X) = (\lambda E - X_1)(\lambda E - X_2) \neq (\lambda E - X_2)(\lambda E - X_1) .$$

On conclut de ce qui précède, pour la décomposition en facteurs-linéaires, si nous formons les déterminants en (5), que les racines caractéristiques d'une solution de l'équation (3) sont en effet des racines de

$$\left| \sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} \right| = 0 .$$