Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER
Autor: Herrmann, Aloys
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26614

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

La construction de la droite T_b résulte de l'équation (4) analogiquement à la construction T_a (voir le théorème 10). Nous aurons:

$$T_b = (a, d, l, m) \times (e, l, a, b) \times (d \times e) \times m \times (a \times b) \times \\ \times (a, c, b, e) \times (c \times d) \times b,$$

où

$$l = (f, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (f \times a)$$
$$m = (g, b, c, d) \times (a, c, b, e) \times (g \times a)$$

après (1) du théorème 7.

Si nous posons partout x au lieu b, nous aurons la construction que nous avions à démontrer.

Prague, janvier 1935.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE SYLVESTER

PAR

Aloys HERRMANN (Köthen in Anhalt).

Cette Note a pour but d'exposer une méthode qui fait voir qu'on peut étendre les recherches de SYLVESTER [1], *Sur la solution explicite de l'équation quadratique de Hamilton en quaternions ou en matrices du second ordre.*

Soient A, B, C et X des matrices carrées d'ordre $n = 2$; il est démontré que chaque racine caractéristique d'une solution X de l'équation en matrices $AX^2 + BX + C = 0$ est une solution de l'équation algébrique de l'ordre 4 en λ, obtenue en annulant le déterminant $|A\lambda^2 + B\lambda + C|$. En outre, on a fait [2] plusieurs tentatives pour déterminer le nombre des solutions d'une équation en matrices d'ordre $n > 2$.

---

[1] SYLVESTER, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 99 (1884), p. 555-558 et 621-631.

[2] *Ibidem*, p. 13-15; *Phil. Mag.*, vol. 18 (1884), p. 454-458; *Quat. J. math.*, vol. 20 (1885), p. 305-312.

Il est bien connu [1] que pour une fonction holomorphe $g(z)$ dans une région B de connexion simple du plan des z et pour une matrice A, dont les racines z_j sont intérieures à B, $g(\mathrm{A})$ se laisse exprimer par $f_i(\mathrm{A})$, résidus de la résolvante $(\zeta \mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$ pour les pôles z_j de cette fonction-matrice de ζ, ce qui donne

$$g(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{m} f_j(\mathrm{A}) \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_j)(\mathrm{A} - z_j)^{\nu} . \tag{1}$$

On peut se servir de cette formule pour établir les résultats sur les équations en matrices et je me contente ici de faire voir quelle est la marche pour déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{m} \mathrm{C}_\nu \mathrm{X}^\nu = 0 ,$$

si $\mathrm{C}_0 = \mathrm{E}$ et C_ν sont des matrices de l'ordre n, d'où résulte immédiatement le théorème, concernant les racines caractéristiques des solutions.

Soient C_j des matrices à éléments constants et

$$\mathrm{Y}^{(\sigma-j)}(x) = [y_{ik}(x)]^{(\sigma-j)}$$

la matrice, dont les éléments $y_{ik}^{(\sigma-j)}(x)$ sont des dérivées du $(\sigma - j)$ ordre des éléments de la matrice Y, nous considérons que

$$\sum_{j=0}^{\sigma} \mathrm{C}_j \mathrm{X}^{(\sigma-j)} = 0 , \qquad \mathrm{C}_0 = \mathrm{E} . \tag{2}$$

Substituant la fonction exponentielle

$$\mathrm{Y} = \exp[(\tau_{ik})x] ,$$

avec (τ_{ik}) matrice de l'ordre n, on obtient une équation algébrique en matrices

$$\sum_{j=0}^{\sigma} \mathrm{C}_j \mathrm{X}^{\sigma-j} = 0 , \qquad \mathrm{C}_0 = \mathrm{E} \tag{3}$$

[1] Voir H. SCHWERDTFEGER, Sur une formule de H. Poincaré relative à la théorie des groupes de S. Lie, *L'Enseignement math.*, 33, 193, p. 304-319 et pour la formule (1) A. HERRMANN, *Proc. Amsterdam*, 1935, vol. 38, p. 394-401.

pour la matrice (τ_{ik}), et nous dirons que l'équation (3) est l'équation *adjointe* de l'équation (2). Réciproquement on peut adjoindre à chaque équation de la forme (3) une équation de la forme (2).

Pour établir les matrices (τ_{ik}), il faut avoir égard au fait que $\exp\left[(\tau_{ik})x\right]$ se présente aussi comme solution d'une équation (2) de l'ordre $\sigma = 1$. On remplace (2) par une équation équivalente

$$\sum_{j=0}^{1} \overline{T}_j Z^{(\sigma-j)} = 0 , \qquad \overline{T}_0 = E , \qquad \overline{T}_1 = -(\overline{\tau}_{ik}) , \tag{4}$$

où les matrices seront de l'ordre σn. On déduit de (1) la solution $\exp\left[(\overline{\tau}_{ik})x\right]$ de l'équation (4) et, de même, de la formule (1) pour la fonction exponentielle les solutions de (2) en résultent; c'est-à-dire, connaissant à cause de (4) les solutions de (2), nous pouvons déterminer les matrices (τ_{ik}). Le nombre des solutions dépend de la multiplicité des racines de l'équation caractéristique pour $(\overline{\tau}_{ik})$, de laquelle la possibilité de former les matrices (τ_{ik}) résulte uniquement. Ces questions font l'objet d'une note publiée récemment par moi (loc. cit.). Pour voir que les racines caractéristiques d'une solution de l'équation (3) sont aussi des racines de

$$\left| \sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} \right| = 0 ,$$

nous effectuons une décomposition de

$$\sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} .$$

Supposons que

$$A = \sum_{i=0}^{\nu} A_i \lambda^{\nu-i} \quad \text{et} \quad B = \sum_{i=0}^{\mu} B_i \lambda^{\mu-i}$$

soient deux matrices et que $\mu < \nu$; il existe une et seulement une matrice $Q(\lambda)$ avec $R(\lambda)$ tel que

$$A = QB + R , \qquad (R(\lambda) \text{ en } \lambda \text{ de degré} < \mu) .$$

Si $R(\lambda) = 0$, B est diviseur-droit de A. Nous voulons soumettre $R(\lambda)$ à la restriction $B(\lambda) = \lambda E - X$. Si cette condition est réalisée, on a

$$A(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - X) + R$$

où R est une matrice, dont les éléments sont indépendants de λ. Si R s'annule, on a une décomposition $A = QB$, où B est un facteur-linéaire.

Soit A décomposé

$$A = \prod_{k=1}^{\nu} (\lambda E - X_k) \; ; \tag{5}$$

tenant compte de l'arrangement des facteurs, nous aurons

$$A = \sum_{i=0}^{\nu} S_i \lambda^{\nu-i} \; ,$$

et il résulte que X_1 est une solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{\nu} X^{\nu-i} S_i = 0 \; .$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_1 &= - X_1 - (X_2 + \ldots + X_\nu) \; , \\
S_2 &= X_1 (X_2 + \ldots + X_\nu) + (X_2 X_3 + \ldots + X_{\nu-1} X_\nu) \; , \\
S_3 &= - X_1 (X_2 X_3 + \ldots + X_{\nu-1} X_\nu) - (X_2 X_3 X_4 + \ldots + X_{\nu-2} X_{\nu-1} X_\nu) \; , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_\nu &= (-1)^\nu X_1 X_2 \ldots X_\nu \; .
\end{aligned}$$

Ces équations donnent, si l'on les multiplie respectivement à gauche par $X_1^{\nu-1}$, $X_1^{\nu-2}$, ... X_1^0 et si l'on fait la somme

$$\sum_{i=0}^{\nu} X^{\nu-i} S_i = 0 \; .$$

Des considérations tout à fait analogues s'appliquent à X_ν, et on voit que X_ν est une solution de l'équation-gauche

$$\sum_{i=0}^{\nu} S_i X^{\nu-i} = 0 \; .$$

Par exemple

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ est une solution de l'équation-gauche}$$

$$f_1(X) = X^2 + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ est une solution de l'équation-droite}$$

$$f_2(X) = X^2 + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

et

$$f_1(X) = (\lambda E - X_1)(\lambda E - X_2) \neq (\lambda E - X_2)(\lambda E - X_1) \ .$$

On conclut de ce qui précède, pour la décomposition en facteurs-linéaires, si nous formons les déterminants en (5), que les racines caractéristiques d'une solution de l'équation (3) sont en effet des racines de

$$\left| \sum_{j=0}^{\sigma} C_j \lambda^{\sigma-j} \right| = 0 \ .$$