

# QUELQUES EXPRESSIONS REMARQUABLES DE L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE DANS LE CERCLE

Autor(en): **Toscano, Letterio**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **32 (1933)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25332>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# QUELQUES EXPRESSIONS REMARQUABLES DE L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE DANS LE CERCLE <sup>1</sup>

PAR

Letterio TOSCANO (Messine).

---

1. Dans un mémoire intitulé *Metrische Relationen am Sehnenviereck* (Archiv der Mathematik und Physik, zweite Reihe, Siebenter Teil, 1889, pages 64-98) M. Otto ZIMMERMANN a calculé la valeur de quelques éléments remarquables du quadrilatère inscrit et a exprimé les côtés et l'aire du quadrilatère lui-même en fonction de ces éléments.

Nous démontrons ici trois autres expressions de l'aire du quadrilatère inscrit, expressions qui se dégagent naturellement des éléments introduits dans le mémoire en question, et nous donnons une démonstration plus simple d'une formule établie par M. Zimmermann.

2. Soit ABCD un quadrilatère inscriptible dans un cercle, et tel que  $AB > CD$  et  $BC > AD$ .

Si nous intervertissons les côtés BC et CD, en posant  $BC' = CD$  et  $C'D = BC$ , nous obtenons le nouveau quadrilatère ABC'D, inscriptible dans le même cercle.

Posons

$$\begin{aligned} AB &= a, & BC &= b, & CD &= c, & DA &= d, \\ AC &= f, & BD &= g, & AC' &= h, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Traduit de l'italien par A. PITTET (Genève).

et appelons O, P, Q les trois points diagonaux obtenus par l'intersection des couples de droites (AC, BD), (AB, CD), (AD, BC).

Désignons par S l'aire du quadrilatère.

Posons en outre pour abrégé :

$$(ab) = ab + cd, \quad (ac) = ac + bd, \quad (ad) = ad + bc,$$

$$\{a\} = -a + b + c + d, \quad \{b\} = a - b + c + d,$$

$$\{c\} = a + b - c + d, \quad \{d\} = a + b + c - d.$$

Nous avons les relations :

$$f^2 = \frac{(ac)(ad)}{(ab)}, \quad g^2 = \frac{(ac)(ab)}{(ad)}, \quad h^2 = \frac{(ab)(ad)}{(ac)};$$

$$fg = (ac), \quad fh = (ad), \quad gh = (ab);$$

$$AO = \frac{ad}{h}, \quad BO = \frac{ab}{h}, \quad CO = \frac{bc}{h}, \quad DO = \frac{cd}{h};$$

$$AP = \frac{d(ad)}{b^2 - d^2}, \quad BP = \frac{b(ab)}{b^2 - d^2}, \quad CP = \frac{b(ad)}{b^2 - d^2}, \quad DP = \frac{d(ab)}{b^2 - d^2};$$

$$AQ = \frac{a(ad)}{a^2 - c^2}, \quad BQ = \frac{a(ab)}{a^2 - c^2}, \quad CQ = \frac{c(ad)}{a^2 - c^2}, \quad DQ = \frac{c(ab)}{a^2 - c^2};$$

$$16S^2 = \{a\}\{b\}\{c\}\{d\};$$

$$\text{aire ABQ} = \frac{a^2 S}{a^2 - c^2}, \quad \text{aire BCP} = \frac{b^2 S}{b^2 - d^2}, \quad \text{aire CDQ} = \frac{c^2 S}{a^2 - c^2},$$

$$\text{aire DAP} = \frac{d^2 S}{b^2 - d^2}.$$

### 3. Soient donnés

le cercle (1) exinscrit au triangle QAB,

» » (2) » » » PBC,

» » (3) inscrit dans le » QCD,

» » (4) » » » PAD.

Ils touchent les côtés AB, BC, CD, DA du quadrilatère respectivement aux points  $H_1, H_2, H_3, H_4$ .

Posons  $AH_1 = m'_1$ ,  $H_1B = m_1$ ,  $BH_2 = m_2$ ,  $H_2C = m_2$ ,

$CH_3 = m'_3$ ,  $H_3D = m_3$ ,  $DH_4 = m'_4$ ,  $H_4A = m_4$ .

Nous avons les relations ( $\alpha$ )

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{a\{b\}}{2(a+c)}, & m'_1 &= \frac{a\{d\}}{2(a+c)}, \\
 m_2 &= \frac{b\{c\}}{2(b+d)}, & m'_2 &= \frac{b\{a\}}{2(b+d)}, \\
 m_3 &= \frac{c\{d\}}{2(a+c)}, & m'_3 &= \frac{c\{b\}}{2(a+c)}, \\
 m_4 &= \frac{d\{a\}}{2(b+d)}, & m'_4 &= \frac{d\{c\}}{2(b+d)}.
 \end{aligned} \tag{\alpha}$$

Ces mêmes cercles (1), (2), (3), (4) touchent les côtés QA, PB, QD, PA, respectivement aux points  $K_1, K_2, K_3, K_4$ ; et en posant  $QK_1 = v_1, PK_2 = v_2, QK_3 = v_3, PK_4 = v_4$ , nous aurons les relations ( $\beta$ )

$$v_1 = \frac{a\{c\}}{2(a-c)}, \quad v_2 = \frac{b\{d\}}{2(b-d)}, \quad v_3 = \frac{c\{a\}}{2(a-c)}, \quad v_4 = \frac{d\{b\}}{2(b-d)}. \tag{\beta}$$

Soient donnés:

le cercle (5) inscrit dans le triangle QAB,

» » (6) » » » » PCB,

» » (7) exinscrit au » » QDC,

» » (8) » » » » PAD.

Ils touchent les droites AD, AB, CB, CD respectivement aux points  $L_1, L_2, L_3, L_4$ ; et en posant

$$QL_1 = v'_1, \quad PL_2 = v'_2, \quad QL_3 = v'_3, \quad PL_4 = v'_4,$$

nous aurons les relations ( $\beta'$ )

$$v'_1 = \frac{a\{a\}}{2(a-c)}, \quad v'_2 = \frac{b\{b\}}{2(b-d)}, \quad v'_3 = \frac{c\{c\}}{2(a-c)}, \quad v'_4 = \frac{d\{d\}}{2(b-d)}. \tag{\beta'}$$

4. Les cercles exinscrits aux triangles QAB, PBC, QCD, PDA, ont pour rayon

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2aS}{(a+c)\{a\}}, & r_2 &= \frac{2bS}{(b+d)\{b\}}, & r_3 &= \frac{2cS}{(a+c)\{c\}}, \\ r_4 &= \frac{2dS}{(b+d)\{d\}}, \end{aligned} \quad (\gamma)$$

et les rayons des cercles inscrits dans les triangles QAB, PBC, QCD, PAD, sont

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{2aS}{(a+c)\{c\}}, & \rho_2 &= \frac{2bS}{(b+d)\{d\}}, & \rho_3 &= \frac{2cS}{(a+c)\{a\}}, \\ \rho_4 &= \frac{2dS}{(b+d)\{b\}}. \end{aligned} \quad (\gamma')$$

5. A l'aide des segments  $m_1, m_2, m_3, m_4$  d'abord, et ensuite à l'aide des segments  $m'_1, m'_2, m'_3, m'_4$ , M. Zimmermann donne deux expressions assez compliquées de l'aire du quadrilatère.

Par contre, en prenant ensemble les segments  $m_i$  et  $m'_i$ , (qui du reste s'obtiennent par les mêmes considérations appliquées aux cercles inscrits et exinscrits) nous obtenons aisément une formule simple et élégante.

En effet, on tire facilement des formules ( $\alpha$ )

$$\begin{aligned} \{a\} &= 2(m'_2 + m_4), & \{b\} &= 2(m_1 + m'_3), \\ \{c\} &= 2(m_2 + m'_4), & \{d\} &= 2(m'_1 + m_3), \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \{a\}\{b\}\{c\}\{d\} &= 16(m_1 + m'_3)(m'_1 + m_3)(m_2 + m'_4)(m'_2 + m_4), \\ S^2 &= (m_1 + m'_3)(m'_1 + m_3)(m_2 + m'_4)(m'_2 + m_4). \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on déduit des formules ( $\beta$ ) et ( $\beta'$ )

$$\begin{aligned} \{a\} &= 2(\nu'_1 - \nu_3), & \{b\} &= 2(\nu'_2 - \nu_4), \\ \{c\} &= 2(\nu_1 - \nu'_3), & \{d\} &= 2(\nu_2 - \nu'_4), \\ \{a\}\{b\}\{c\}\{d\} &= 16(\nu_1 - \nu'_3)(\nu'_1 - \nu_3)(\nu_2 - \nu'_4)(\nu'_2 - \nu_4), \end{aligned}$$

et en définitive:

$$S^2 = (\nu_1 - \nu'_3) (\nu'_1 - \nu_3) (\nu_2 - \nu'_4) (\nu'_2 - \nu_4) .$$

On déduit encore des formules  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$

$$r_1 + \rho_3 = \frac{2S}{\{a\}} , \quad r_2 + \rho_4 = \frac{2S}{\{b\}} , \quad r_3 + \rho_1 = \frac{2S}{\{c\}} , \quad r_4 + \rho_2 = \frac{2S}{\{d\}} ,$$

et par suite

$$\frac{16S^4}{\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}} = (r_1 + \rho_3)(\rho_1 + r_3)(r_2 + \rho_4)(\rho_2 + r_4) ,$$

$$S^2 = (r_1 + \rho_3)(\rho_1 + r_3)(r_2 + \rho_4)(\rho_2 + r_4) .$$

6. En désignant par  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , les segments qui joignent le point diagonal O aux points milieux des côtés du quadrilatère, nous avons la formule

$$S^2 = \{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\} .$$

Nous donnons maintenant, de cette formule, une démonstration plus simple que celle de M. Zimmermann. Par le théorème sur les médianes d'un triangle on a:

$$4t_1^2 = 2AO^2 + 2BO^2 - a^2 , \quad 4t_2^2 = 2BO^2 + 2CO^2 - b^2 ,$$

$$4t_3^2 = 2CO^2 + 2DO^2 - c^2 , \quad 4t_4^2 = 2DO^2 + 2AO^2 - d^2 ,$$

et, en tenant compte des relations fondamentales du n° 2, les égalités précédentes se transforment en:

$$4h^2t_1^2 = a^2(2b^2 + 2d^2 - h^2) , \quad 4h^2t_2^2 = b^2(2a^2 + 2c^2 - h^2) ,$$

$$4h^2t_3^2 = c^2(2b^2 + 2d^2 - h^2) , \quad 4h^2t_4^2 = d^2(2a^2 + 2c^2 - h^2) .$$

D'où il s'ensuit d'abord que

$$t_1 : t_3 = a : c , \quad t_2 : t_4 = b : d ,$$

et ensuite que

$$\frac{t_1 + t_3}{t_1 - t_3} = \frac{a + c}{a - c} , \quad \frac{t_2 + t_4}{t_2 - t_4} = \frac{b + d}{b - d} .$$

Ces dernières relations nous donnent

$$t_1 + t_3 = \lambda(a + c) , \quad (1) \qquad t_1 - t_3 = \lambda(a - c) , \quad (2)$$

$$t_2 + t_4 = \mu(b + d) , \quad (3) \qquad t_2 - t_4 = \mu(b - d) , \quad (4)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{2b^2 + 2d^2 - h^2}{4h^2} , \qquad \mu^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - h^2}{4h^2} .$$

Effectuons maintenant les opérations (3) — (2), (1) — (4), (2) + (3), (1) + (4), et nous aurons

$$\{t_1\} = -\lambda(a - c) + \mu(b + d)$$

$$\{t_2\} = \lambda(a + c) - \mu(b - d)$$

$$\{t_3\} = \lambda(a - c) + \mu(b + d)$$

$$\{t_4\} = \lambda(a + c) + \mu(b - d) .$$

Multiplions la première et la troisième de ces égalités:

$$\begin{aligned} 4\{t_1\}\{t_3\} &= 4\mu^2(b + d)^2 - 4\lambda^2(a - c)^2 = \\ &= \frac{2a^2 + 2c^2 - h^2}{h^2}(b + d)^2 - \frac{2b^2 + 2d^2 - h^2}{h^2}(a - c)^2 = \\ &= \frac{2}{h^2}[(a^2 + c^2)(b + d)^2 - (b^2 + d^2)(a - c)^2] + (a - c)^2 - (b - d)^2 = \\ &= \frac{4}{h^2}[a^2bd + ab^2c + bc^2d + acd^2] + (a - c)^2 - (b - d)^2 = \\ &= \frac{4}{h^2}(ab)(ad) + (a - c)^2 - (b - d)^2 ; \end{aligned}$$

mais  $h^2 = \frac{(ab)(ad)}{(ac)}$  et par conséquent

$$\begin{aligned} 4\{t_1\}\{t_3\} &= 4(ac) + (a - c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 = \{b\}\{d\} . \end{aligned}$$

Nous aboutissons ainsi à la relation remarquable

$$4\{t_1\}\{t_3\} = \{b\}\{d\} ,$$

et, d'une manière analogue, nous trouverions l'autre

$$4\{t_2\}\{t_4\} = \{a\}\{c\}.$$

Alors

$$\{a\}\{b\}\{c\}\{d\} = 16\{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\}$$

et, en définitive,

$$S^2 = \{t_1\}\{t_2\}\{t_3\}\{t_4\}.$$

Catanzaro, juillet 1932.

## LA TRANSFORMATION $\omega = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}}$

PAR

W. MICHEL (Berne).

### I. — INTRODUCTION.

Toute fonction de deux variables complexes de la forme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{Az^2 + Bz + C}} \quad (1)$$

peut être mise sous la forme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (2)$$

par les transformations homothétiques des plans des  $z$  et des  $\omega$

$$z = \frac{Dz' - B}{2A}, \quad \omega = \frac{2\sqrt{A}}{D}\omega',$$

où nous supposons  $D = \sqrt{B^2 - 4AC} \neq 0$ .

Le caractère de la représentation d'une fonction n'est pas modifié par une transformation homothétique. Nous pouvons