

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 32 (1933)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA MESURE DES GRANDEURS
Autor: Lebesgue, Henri
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-25317>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA MESURE DES GRANDEURS¹

PAR

M. Henri LEBESGUE,

Membre de l'Institut (Paris).

III. — AIRES.

Comme précédemment je commencerai par un exposé; pour éviter tout malentendu, je précise que cet exposé exigerait, à mon avis, de sérieux allègements, qu'on pourrait obtenir par exemple en supprimant les démonstrations de certains points, pour être à la portée des élèves moyens de la classe de Mathématiques. Je ne le préconise donc nullement comme exposé à faire dans cette classe; seule une expérience permettrait de juger dans quelle mesure il pourrait y être adopté. Je le donne seulement comme base à partir de laquelle nous discuterons.

24. — *Notion d'aire.* — Supposons que l'on ait à sa disposition des carreaux ayant la forme de carrés tous égaux et qu'on veuille carreler diverses pièces. Pour celle-ci il suffira de 100 carreaux utilisés convenablement et entièrement, peut-être après subdivision de certains d'entre eux; pour celle-là il faudrait 150 carreaux. On dit que la première pièce a une aire plus petite que la seconde et l'on précise en disant que la première a une aire égale à 100 carreaux, et la seconde une aire de 150 carreaux.

On conçoit que cette question pratique et d'autres analogues ait conduit à des notions mathématiques, comme la comparaison d'un segment à un segment unité a conduit aux notions de longueur et de nombre.

¹ Voir *L'Enseignement mathématique*, XXXI^e année, p. 173-206.

Pour évaluer les longueurs des différents segments AB portés par une droite nous avons construit sur cette droite, § 8, à partir d'un point ω et dans les deux sens, une graduation en unités U, une graduation en unités U_1 , etc. Et c'est la comparaison de AB à la graduation totale T, à intervalles indéfiniment petits, ainsi obtenue qui permettrait de définir et d'évaluer la longueur de AB. Nous procéderons exactement de la même manière.

Soit donné, en position dans le plan considéré, un carré C, soient ωx , ωy les droites portant deux de ses côtés. Parallèlement à ωx traçons toutes les droites dont les distances à ωx sont des multiples entiers du côté du carré C, faisons de même parallèlement à ωy . Nous couvrons le plan d'un réseau R de carrés égaux à C, que nous appellerons les carrés U. Subdivisons les côtés de ces carrés en dix parties égales, par les points de subdivision menons des parallèles à ωx et ωy , nous obtenons un réseau R_1 de carrés qui sont dits les carrés U_1 . On passe de même à un réseau R_2 de carrés U_2 , etc. La réunion de tous ces réseaux donne ce que nous appellerons le réseau total T déduit de C. C'est par comparaison à T que nous allons définir et évaluer les aires.

Soit¹ un domaine D; comptons combien il y a de carrés U_i formés entièrement de points de D; soit n_i . Comme un carré U_i contient 100 carrés U_{i+1} , on a donc

$$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \dots ;$$

tous ces nombres sont dits au plus égaux à l'aire de D. Comptons combien il y a de carrés U_i dont certains points appartiennent à D; soit N_i . On a évidemment $N_i \geq n_i$, et pour la même raison que plus haut,

$$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \dots :$$

¹ Le mot domaine n'a pas, en géométrie élémentaire, un sens bien précisé; il deviendrait parfaitement clair si l'on se restreignait à la famille des domaines polygonaux, ou à celle des domaines limités chacun par un nombre fini de segments de droite et d'arcs de cercle, etc.. Mais c'est à dessein et pour bien marquer que la définition est la même pour toutes ces familles de domaines qu'on a laissé au mot domaine toute sa généralité imprécisée.

L'emploi de ce mot exigerait, du point de vue strictement logique, que nous démontrions celles des propriétés de ces domaines que nous utiliserons, par exemple celles relatives aux frontières. Mais là encore il s'agit de propriétés parfaitement claires pour les familles particulières simples de domaines et qu'il est alors d'usage constant d'admettre sans démonstrations dans les cours élémentaires.

tous ces nombres, qui sont au moins égaux aux précédents, sont dits au moins égaux à l'aire de D.

Lorsque ces deux suites sont deux suites de valeurs indéfiniment approchées, c'est-à-dire lorsque $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers zéro quand i augmente indéfiniment, on dit que le nombre défini par ces deux suites est l'aire de D par rapport à l'unité U.

Cette définition fournit, comme dans le cas des longueurs, un procédé expérimental pour déterminer le nombre défini. Dans l'un ou l'autre cas, on ne peut réaliser la graduation totale T, mais on peut du moins marquer les premières graduations R, R₁, R₂, par exemple, en unités U, U₁, U₂. Lorsqu'il s'agit de longueurs, on marque ces graduations le long d'une règle qu'on applique ensuite sur le segment à mesurer et on lit de suite les nombres $n, n_1, n_2; N, N_1, N_2$. S'il s'agit d'aire, on marque ces réseaux sur un transparent que l'on place ensuite sur le domaine à étudier et on lit encore $n, n_1, n_2; N, N_1, N_2$.

25. — Nous allons éclaircir cette définition en l'appliquant à un rectangle OACB de côtés OA et OB respectivement parallèles à ωx et ωy ; prenant suivant l'usage le côté ρ de U pour unité de longueur, nous désignerons par a et b les longueurs de OA et OB.

Les côtés de U _{i} parallèles à ωy découpent sur OA une graduation en segments $\frac{\rho}{10^i}$; a_i de ces segments ont tous leurs points appartenant à OA, A _{i} d'entre eux ont certains de leurs points appartenant à OA. $\frac{a_i}{10^i}$ et $\frac{A_i}{10^i}$ sont des valeurs approchées de a , respectivement par défaut et par excès; § 8. On a d'ailleurs $A_i \leq a_i + 2$.

En intervertissant les rôles de OA et de OB, de ωx et de ωy on a de même $\frac{b_i}{10^i} \leq b \leq \frac{B_i}{10^i}$.

Or les n_i carrés U _{i} dont tous les points appartiennent à OACB sont ceux qui se projettent sur OA et OB respectivement suivant les a_i segments et les b_i segments considérés; on a donc $n_i = a_i \cdot b_i$.

Les N _{i} carrés U _{i} dont certains points appartiennent à OACB

sont ceux qui se projettent sur OA et OB respectivement suivant les A_i segments et les B_i segments considérés; on a donc $N_i = A_i \cdot B_i$.

Les deux nombres $\frac{n_i}{100^i} = \frac{a_i}{10^i} \times \frac{b_i}{10^i}$ et $\frac{N_i}{100^i} = \frac{A_i}{10^i} \times \frac{B_i}{10^i}$ fournis par les carrés U_i comprennent donc entre eux le produit ab et l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{N_i - n_i}{100^i} &= \frac{A_i \cdot B_i - a_i b_i}{100^i} \leq \frac{(a_i + 2)(b_i + 2) - a_i b_i}{100^i} \\ &= \frac{2}{10^i} \left[\frac{a_i}{10^i} + \frac{b_i}{10^i} + \frac{2}{10^i} \right] < \frac{2}{10^i} (a + b + 1) ; \end{aligned}$$

donc les deux suites $\frac{N_i}{100^i}$ et $\frac{n_i}{100^i}$ sont indéfiniment approchées.

La valeur qu'elles définissent est ab . Le rectangle OACB a, par rapport à l'unité U , une aire égale à ab .

Ainsi, il a été prouvé que tout rectangle de côtés parallèles à ωx et ωy a une aire, nous avons évalué cette aire et, de l'expression obtenue, il résulte que l'aire est la même pour deux rectangles déduits l'un de l'autre par translation, que l'aire d'un rectangle de côtés parallèles à ωx et ωy formé par l'accolement de deux autres rectangles, a pour aire la somme des aires de ces deux autres.

Pour que notre notion mathématique d'aire soit bien en accord avec la notion expérimentale et puisse être utilisée pratiquement pour un polygone quelconque, il faut évidemment que nous démontrions que tout polygone a une aire, que nous évaluions cette aire, que nous prouvions que deux polygones déduits l'un de l'autre par un mouvement quelconque ont même aire, qu'un polygone formé par l'accolement de deux autres a une aire égale à la somme des aires de ces deux autres.

26. — *Tout polygone a une aire.* Soient P un polygone, N_i et n_i les nombres relatifs à ce polygone et fournis par les carrés U_i ; il faut évaluer $N_i - n_i$. Or ce nombre est celui des carrés U_i comptant dans les N_i sans compter dans les n_i , c'est-à-dire celui des carrés U_i qui contiennent à la fois les points de P et des points n'appartenant pas à P . Un tel carré contient des points

de la frontière (ou contour) de P ; cette frontière est constituée par un nombre fini de segments de droites. Donc il sera prouvé que $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers zéro pour i indéfiniment croissant, si l'on démontre que $\frac{\mu_i}{100^i}$ tend vers zéro, μ_i étant le nombre des carrés U_i qui contiennent des points d'un segment arbitraire AB . Or ceci est facile à établir.

Supposons d'abord que AB ne soit parallèle ni à ωx , ni à ωy . Soit λ un rectangle de côtés parallèles à ωx et ωy dont les côtés parallèles à ωy découpent sur la droite AB un segment $\alpha\beta$ contenant le segment AB . Les carrés U_i qui contiennent des points de AB sont parmi ceux qui contiennent des points de λ ; si ceux-ci sont en nombre N_i le nombre $\frac{\mu_i}{100^i}$ est au plus égal à $\frac{N_i}{100^i}$, c'est-à-dire à la valeur approchée par excès de l'aire de λ laquelle, pour i assez grand, surpasse cette aire d'aussi peu qu'on le veut. Si donc a et b sont les côtés de λ , pour i assez grand, $\frac{\mu_i}{100^i}$ surpasse ab d'aussi peu qu'on le veut.

Soit γ le milieu de $\alpha\beta$, recommençons le raisonnement pour $\alpha\gamma$ d'une part, pour $\gamma\beta$ de l'autre; remplaçons la figure λ , $\alpha\beta$, par des figures semblables λ_1 , $\alpha\gamma$; λ_2 , $\gamma\beta$; λ_1 et λ_2 sont de dimensions $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ et comme, pour qu'un carré U_i contienne des points de $\alpha\beta$, il faut qu'il contienne des points de $\alpha\gamma$ ou des points de $\gamma\beta$, pour i assez grand, $\frac{\mu_i}{100^i}$ surpasse d'aussi peu qu'on le veut

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Une nouvelle subdivision donnerait de même $\frac{ab}{2^2}$, puis $\frac{ab}{2^3}$, etc. $\frac{\mu_i}{100^i}$ est donc aussi petit qu'on le veut pour i assez grand.

Si AB est parallèle à ωx ou ωy , on remplacera λ par un rectangle de base AB et de hauteur arbitrairement petite.

27. — Si l'on subdivise un polygone P en polygones $P_1, P_2, \dots, P_m$ on a : aire de $P =$ aire de $P_1 +$ aire de $P_2 + \dots +$ aire de P_m .

En effet, les n_i carrés U_i contenus dans P sont soit contenus en entier dans l'un des polygones P_k , il y en aura par exemple n_k^i dans P_k , soit tels qu'ils contiennent les points des frontières des P_k . Soit μ_i le nombre de ceux-ci. On a :

$$n_i = n_1^i + n_2^i + \dots + n_m^i + \mu_i.$$

Or, pour i augmentant indéfiniment, $\frac{n_i}{100^i}$ et les $\frac{n_k^i}{100^i}$ se rapprochent indéfiniment de l'aire de P et des aires des P_k , tandis que $\frac{\mu_i}{100^i}$ tend vers zéro; d'où l'égalité annoncée.

Il en résulte de suite

$$\text{aire de } P > \text{aire de } P_1 + \dots + \text{aire de } P_m.$$

— pour le cas d'un polygone P contenant des polygones $P_1, P_2, \dots, P_m$ extérieurs les uns aux autres et ne constituant pas tout P à eux seuls — et

$$\text{aire de } P < \text{aire de } P_1 + \dots + \text{aire de } P_m$$

— pour le cas d'un polygone P formé par la réunion de polygones P_k qui ne sont pas tous entièrement extérieurs deux à deux.

28. — Dans une classe, il conviendrait de traiter entièrement le cas des polygones avant d'aborder celui des autres domaines; m'adressant ici à des Professeurs j'éviterai les redites, autrement inévitables, en parlant de la condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine D ait une aire.

On a vu qu'il fallait que le nombre $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tende vers zéro pour i croissant indéfiniment. $\frac{N_i}{100^i}$ est l'aire d'un polygone E formé par les N_i carrés U_i utilisés, E couvre D ; $\frac{n_i}{100^i}$ est la somme des aires des polygones I formés par les n_i carrés U_i utilisés; I est couvert par D .

Donc pour qu'un domaine D ait une aire, il faut qu'il puisse être couvert par un polygone E et qu'il couvre des polygones I ,

extérieurs les uns aux autres, et de manière que l'aire de E surpasse la somme des aires des I d'aussi peu qu'on le veut. La réciproque est vraie; car alors, pour i assez grand, les N'_i carrés U_i contenant des points d'un tel polygone E ont une aire qui surpasse celle de E d'aussi peu qu'on le veut et les n'_i carrés formés uniquement de points des I ont une aire totale aussi peu inférieure qu'on le veut à celle des I. Et comme, si N_i et n_i sont les nombres habituels relatifs à D, on a

$$N'_i \geq N_i \geq n_i \geq n'_i,$$

$\frac{N_i - n_i}{100^i}$, qui est inférieur à $\frac{N'_i - n'_i}{100}$, lequel surpasse d'aussi peu qu'on le veut *aire de E — aire de I*, est aussi petit qu'on le veut. De plus, l'aire de D est comprise entre celles de E et de I.

L'application de cet énoncé à l'extension des énoncés du paragraphe précédent, comme aussi à la démonstration du fait qu'un domaine provenant de la réunion de plusieurs autres a une aire dès que ceux-ci en ont une, est immédiate. Il va nous permettre aussi de donner au paragraphe suivant une portée plus générale.

29. — *Deux polygones égaux ont même aire.* Plus généralement, si D est un domaine ayant une aire et si Δ est égal à D, Δ a une aire; cette aire est égale à celle de D. Nous subdiviserons la démonstration, en supposant d'abord que D est un polygone et en faisant des hypothèses sur la nature du mouvement qui transforme D en Δ .

a) *Le polygone Δ se déduit de D par une translation.* D est couvert par N_i carrés U_i et en contient n_i ; la translation transforme les carrés U_i en carrés V_i de même aire, § 25. Donc Δ est couvert par N_i carrés V_i et en contient n_i de sorte que l'on a:

$$\frac{n_i}{100^i} \leq \text{aire de } \Delta \leq \frac{N_i}{100^i}.$$

Ce qui montre que Δ et D ont la même aire.

b) *Le polygone Δ se déduit de D par une symétrie par rapport à l'axe ZZ'.* Soit C' un carré dont un côté est sur ZZ', à partir de C' construisons un réseau T' comme, à partir de C, nous avons

construit le réseau T au § 24. Les carrés successifs de T' seront désignés par $U', U'_1, U'_2, \dots$. Soient N'_i et n'_i les nombres des carrés U'_i qui contiennent des points de Δ , et qui ne contiennent que des points de D . Tous ces carrés U'_i ont la même aire, § 29^a; il y en a 100^i dans C' , ils ont, § 27, une aire égale à $\frac{S}{100^i}$, si S est l'aire de C' . Donc on a :

$$\frac{n'_i}{100^i} S \leq \text{aire de } D \leq \frac{N'_i}{100^i} S,$$

et, pour i croissant indéfiniment, la différence entre les deux membres extrêmes tend vers zéro, puisque, § 26, $\frac{N'_i - n'_i}{100^i}$ tend vers zéro.

Mais à cause de la symétrie de T' de D et Δ par rapport à ZZ' , les nombres N'_i et n'_i valent aussi pour Δ , l'aire de Δ vérifie aussi l'inégalité précédente. Donc Δ et D ont la même aire.

c) *Le polygone Δ est égal au polygone D .* Soient A, α ; B, β deux couples de points correspondants de D et Δ . La translation $A\alpha$ transforme B en β' ; la symétrie par rapport à la médiatrice de $\beta\beta'$ transforme D en D' tel que A est en α , B en β . Alors, ou D' est confondu avec Δ , ou D' est symétrique de Δ par rapport à $\alpha\beta$. Dans les deux cas, on passe de D à Δ par une suite de transformations laissant l'aire invariable: D et Δ ont même aire.

d) *D est un domaine ayant une aire.* Soient E et I deux polygones, l'un qui couvre D l'autre couvert par lui, et dont les aires diffèrent de moins de ε . Le déplacement qui transforme D en Δ transforme E et I en des polygones de mêmes aires dont l'un couvre Δ et l'autre est couvert par lui. Et, puisque la différence ε de ces aires est arbitrairement petite, Δ a une aire; celle-ci diffère de celle de E de moins de ε , donc D et Δ ont même aire.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut encore se formuler ainsi: l'aire d'un domaine ne dépend pas de la donnée du carré unité C en position, mais seulement en grandeur; c'est-à-dire, puisque nous convenons de prendre le côté de C pour unité de longueur, que l'aire ne dépend que de l'unité de longueur.

En effet, soient deux carrés égaux C et C' , soient T et T' les deux réseaux qui se déduisent respectivement de l'un et de

l'autre. Pour évaluer l'aire d'un domaine D à partir de C' il faut, par exemple, compter les nombres N_i et n_i relatifs à D et T' . Ces nombres sont aussi ceux relatifs à Δ et T , si Δ est ce que devient D par le déplacement qui transforme C' en C ; donc, si D a une aire par rapport à C' , Δ a une aire par rapport à C et ces deux aires sont égales. Or, puisque Δ et D sont égaux, D a aussi une aire par rapport à C et égale à celle de Δ par rapport à C ; donc D a une aire et par rapport à C et par rapport à C' , et ces deux aires sont égales.

Les deux énoncés précédents se résument en un seul: un déplacement relatif d'un domaine et du réseau T n'a aucune influence, ni sur l'existence de l'aire du domaine, ni sur la valeur de cette aire.

30. — Examinons maintenant l'influence du changement d'unité de longueur, c'est-à-dire le remplacement du carré C par un carré C' de grandeur différente, sur l'existence de l'aire d'un domaine D et sa valeur, c'est-à-dire traitons la question analogue à celle qui, au § 11, nous a conduit à la multiplication.

Supposons qu'avec C les nombres relatifs aux carrés U_i soient N_i et n_i , la frontière de D peut donc être couverte avec des polygones (des carrés U_i) dont l'aire totale avec la nouvelle unité de longueur est $(N_i - n_i) \frac{S}{100^i}$, si S est la nouvelle aire de C .

Or, par hypothèse, $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ tend vers zéro quand i croît indéfiniment, car on suppose que D a une aire par rapport à C . Donc D a encore une aire par rapport à C' . Et cette aire A' , étant comprise entre $N_i \frac{S}{100^i}$ et $n_i \frac{S}{100^i}$, quel que soit i , est égale à l'aire A de D par rapport à C multipliée par S ; $A' = AS$. Si c est la nouvelle longueur du côté de C , ceci s'écrit

$$A' = A.c^2 .$$

Le changement de l'unité de longueur a pour effet de multiplier toutes les aires par le carré de la longueur de l'ancienne unité de longueur par rapport à la nouvelle.

Cette proposition qui exprime l'effet, sur la comparaison de

D à C, d'une transformation relative par figures semblables effectuée sur l'un des deux domaines D et C, peut comme la précédente être énoncée sous une forme inverse.

Laissons en effet C fixe et remplaçons D par un domaine semblable D', le rapport de similitude étant k ; si C' désigne le transformé de C, dans la similitude de rapport k , les nombres N_i et n_i relatifs à C et D d'une part, à C' et D' d'autre part sont les mêmes. Donc D' a une aire par rapport à C', et celle-ci est égale à l'aire de D par rapport à C, soit A; donc l'aire de D' par rapport à C existe et est Ak^2 , puisque k^2 est l'aire de C', le côté de C' étant k .

Donc, une transformation par figures semblables de rapport k transforme un domaine D ayant une aire A en un domaine D' ayant une aire Ak^2 .

31. --- Les propriétés de l'aire, qui viennent d'être prouvées, sont bien en accord avec les modes d'utilisation de l'aire dans la pratique et c'est même parce qu'il y a cet accord que l'on peut espérer avoir bien traduit mathématiquement la notion vulgaire d'aire. Si, pourtant, il y avait d'autres manières que celles que nous avons envisagées d'attacher aux domaines des nombres jouissant eux aussi des propriétés que nous venons de prouver dans les paragraphes précédents pour les nombres que nous avons appelés aires, il y aurait plusieurs traductions mathématiques possibles de la notion pratique d'aire et l'on pourrait craindre de ne pas avoir choisi la meilleure. De sorte que, même en considérant les mathématiques comme une science expérimentale, il est important de démontrer que *les aires que nous venons de considérer sont entièrement déterminées par les conditions suivantes :*

α — *A chacun des domaines d'une famille de domaines dont font partie tous les polygones est attaché un nombre positif que l'on appelle son aire.*

β — *A un domaine formé par la réunion de deux autres extérieurs l'un à l'autre est attaché comme aire la somme des aires des deux autres.*

γ — *A deux domaines égaux sont attachés des aires égales.*

De plus, on verra que :

δ — *Ces nombres aires sont entièrement fixés numériquement, quand on connaît l'aire attachée à l'un des domaines.*

En effet, prenons un carré C quelconque, soit k^2 le nombre attaché à C. Alors, si D est un domaine quelconque de la famille, et si N_i et n_i sont les nombres relatifs à D et au réseau T construit à partir de C, l'aire de D est comprise entre $N_i \frac{k^2}{100^i}$ et $n_i \frac{k^2}{100^i}$ de sorte que c'est celle que notre procédé permet d'attacher à D quand on prend pour carré d'aire 1 le transformé de C dans le rapport $\frac{1}{k}$. D'ailleurs le nombre k est connu; si, en effet, σ_0 est l'aire connue d'un domaine D_0 , et si σ est l'aire que notre procédé permet d'attacher à D_0 à l'aide du réseau T (c'est-à-dire si σ est la limite des nombres $\frac{N_i}{100^i}$ et $\frac{n_i}{100^i}$), on a $k^2 = \frac{\sigma_0}{\sigma}$ ¹.

Les propriétés α , β , γ constituent la définition axiomatique de l'aire, débarrassée de ce qu'avait d'apparemment trop particulier l'emploi du réseau T pour définir cette aire. Le réseau T joue dans la conception de l'aire un rôle analogue à celui de la numération décimale dans la conception de la notion générale de nombre.

32. — On utilise surtout la propriété suivante qui découle de suite de α , β , γ : *deux polygones qui sont décomposables en polygones égaux, c'est-à-dire deux polygones qui proviennent de deux arrangements différents des mêmes parties polygonales, ont la même aire.*

Nous avons démontré cette propriété même pour le cas où il s'agirait de deux domaines provenant de deux arrangements différents de parties de formes quelconques, pourvu que ces parties aient chacune une aire et nous pouvons par suite revenir

¹ A la vérité cette démonstration suppose que D fasse à la fois partie de la famille des domaines pour lesquels notre procédé des paragraphes précédents s'applique et à la famille de ceux auxquels l'énoncé de ce paragraphe suppose qu'on ait attaché un nombre satisfaisant aux conditions α , β , γ . Mais il s'agit de prouver que les conditions α , β , γ suffisent à définir les aires des domaines D précédemment considérés, nous ne devons donc nous occuper que de la famille de ces domaines ou d'une famille plus restreinte.

Si, au contraire, on prenait une famille plus vaste, les conditions α , β , γ pourraient encore être satisfaites; mais, comme je l'ai prouvé jadis, on n'aurait plus la proposition δ . En d'autres termes les propriétés α , β , γ ne suffiraient plus pour caractériser l'aire à un changement près de l'unité d'aire.

maintenant à l'exposé classique. Nous pouvons donc légitimement trouver à la façon ordinaire l'aire du parallélogramme, puis celle du triangle et par suite l'aire d'un polygone quelconque, puisque tout polygone est décomposable en triangles. On peut résumer les résultats dans cet énoncé classique: *soient ABCD... un polygone plan π et O un point de son plan: l'aire du polygone est égale à*

$$\frac{1}{2}[\pm AB \times \text{dist } O, AB \pm BC \times \text{dist } O, BC \pm \dots];$$

Le signe pris devant le terme en PQ étant + ou — suivant que O est ou non du même côté du segment PQ que la partie du polygone π qui avoisine PQ.

Pour justifier cet énoncé, l'aire du triangle étant supposée obtenue, remarquons que les côtés des triangles OAB, OBC, ..., que nous appellerons les triangles T_i , partagent le plan en polygones partiels, que nous désignons ainsi que leurs aires par $P_1, P_2, \dots$ et que chaque triangle T_i est formé de certains des P_i . De sorte que l'expression annoncée, qui est la somme des aires de ces triangles affectés de signes + et —, se présente à nous sous la forme

$$\pm (P_a + P_b + \dots) \pm (P'_a + P'_b + \dots) \pm \dots;$$

il suffit de prouver qu'après la réduction des termes semblables il ne figurera plus que les P intérieurs au polygone π et chacun d'eux avec le coefficient + 1. Or, soit une demi-droite issue de O et ne passant par aucun des sommets A, B, C, ...; parcourons-la en sens inverse et soient $Z_1, Z_2, \dots$ les points de rencontre successifs avec la frontière de π . Fixons les notations de manière qu'à l'entrée dans π en Z_1 , on entre dans T^1 et dans P^1 ; qu'à la sortie de π en Z_2 , on passe de P^1 à P^2 , qu'on entre dans T^2 , sans d'ailleurs sortir de T^1 ; qu'à l'entrée de π en Z_3 , on passe de P^2 à P^3 , qu'on entre dans T^3 , sans d'ailleurs sortir ni de T^1 , ni de T^2 ; etc. Les P_i contenant des points de la demi-droite considérés ne figurent dans la somme que par

$$+ (P^1 + P^2 + P^3 + \dots) - (P^2 + P^3 + \dots) + (P^3 \dots)$$

$$+ \dots = P^1 + P^3 + \dots,$$

ce qui démontre le théorème.

33. — En possession de cet exposé, qui sera complété plus tard pour les domaines non polygonaux, on verra mieux la portée exacte des raisonnements classiques. Ordinairement, on admet que la notion mathématique d'aire est clairement imposée par son emploi pratique et on utilise, le plus souvent implicitement, les axiomes α , β , γ ; la seule modification importante que nous ayons apportée ici est la démonstration de α , β , γ . Sauf sur des points accessoires, il n'y a donc pas opposition entre l'exposé classique et celui d'ici qui est seulement logiquement plus complet.

Que fournit exactement l'exposé classique ? L'évaluation des aires définies par α , β , γ , δ . Même on n'y utilise δ qu'apparemment et quelques précautions de langage insignifiantes (consistant uniquement à parler parfois d'une aire au lieu de l'aire) permettent de se passer de δ . Si bien que l'exposé classique, en fournissant l'évaluation des aires dès que l'unité d'aire est fixée, prouve la proposition δ .

On peut donc dire aussi que l'exposé classique permet de calculer les aires, s'il existe des aires, et qu'il suffirait de constater après coup que les nombres obtenus vérifient les propriétés α , β , γ pour avoir traité la théorie des aires sans avoir fait appel à des axiomes nouveaux. C'est ce qu'ont fait divers géomètres (Schur, Gérard; etc. ¹) donnant ainsi à l'exposé classique une valeur logique équivalente à celle de l'exposé qu'on a pu lire ici.

Voici, légèrement modifiée dans la forme, la méthode des auteurs cités ².

A chaque polygone ABC ... attachons le nombre

$$\frac{1}{2} (\pm AB \times \text{dist. } O, AB \pm BC \times \text{dist. } O, BC \pm \dots) ,$$

O étant un point choisi dans le plan et les signes étant pris comme il a été dit. Nous allons d'abord prouver que ce nombre est, en réalité, indépendant de O.

¹ Pour la bibliographie, voir les Grundlagen der Geometrie de Hilbert et les Questioni riguardanti la Geometria elementari de Enriques.

² Je signale de suite que la phrase α , qui a été qualifiée plusieurs fois précédemment de proposition ou d'axiome bien qu'elle n'était en réalité alors qu'une indication de dénomination, deviendra maintenant une proposition et même la proposition principale: *de quelque manière que l'on décompose un polygone P en triangles partiels T_i , la somme des aires T_i de ces triangles est toujours la même.*

ω_1 étant un point de AB, situé entre A et B, considérons l'angle droit $x_1 \omega_1 y_1$ dont le premier côté $\omega_1 x_1$ est ωB et dont le second est dirigé vers l'intérieur du polygone avoisinant AB. On sait que si l'on transporte cet angle en $x_2 \omega_2 y_2$ de façon que ω vienne en un point ω_2 de BC et que $\omega_1 x_1$ prenne la direction $\omega_2 C$, $\omega_2 y_2$ sera encore dirigé vers l'intérieur du polygone avoisinant BC; etc. De sorte qu'il suffira de mesurer les vecteurs AB, BC, suivant les directions successives de ωx et les vecteurs HO, KO, distances des côtés à O suivant les positions successives de ωy pour que l'expression précédente devienne

$$\frac{1}{2} (\overline{AB} \cdot \overline{HO} + \overline{BC} \cdot \overline{KO} + \dots) .$$

Si l'on a remplacé O par O', ce nombre est remplacé par

$$\frac{1}{2} \{ \overline{AB} [\overline{HO} + \cos (OO', \omega_1 y_1) \cdot \overline{OO'}] \\ + \overline{BC} [\overline{KO} + \cos (OO', \omega_2 y_2) \cdot \overline{OO'}] + \dots \} .$$

Il varie donc de

$$\frac{OO'}{2} [\overline{AB} \cos (O\Omega, \omega_1 x_1) + \overline{BC} \cos (O\Omega, \omega_2 x_2) + \dots] ,$$

$O\Omega$ étant la direction qui provient de OO' quand on effectue la rotation qui amène $\omega_1 y_1$ en $\omega_1 x_1$, $\omega_2 y_2$ en $\omega_2 x_2$, etc. Or la parenthèse est nulle comme mesure de la projection du contour du polygone sur l'axe $O\Omega$; le nombre attaché au polygone est bien indépendant du choix de O. Dans un instant on verra qu'il est bien positif.

Constatons d'abord que ce nombre vérifie la propriété β et pour cela faisons la somme des nombres attachés à deux polygones P_1, P_2 extérieurs l'un à l'autre et qui, par leur réunion forment un polygone P; ces deux nombres étant évalués à l'aide d'un même point O. Comme on ne modifie pas le nombre attaché à un polygone ABC ... en intercalant un sommet Z situé sur AB entre A et B, c'est-à-dire en remplaçant $AB \times \text{dist. (O, AB)}$ par $AZ \times \text{dist. (O, AZ)} + ZB \times \text{dist. (O, ZB)}$ on peut supposer que P_1 et P_2 sont adjacents tout le long de certains côtés. Alors, si AB est un de ces côtés, $AB \times \text{dist. (O, AB)}$ intervient dans les

nombres attachés à P_1 et P_2 et avec des signes différents car P_1 et P_2 sont de part et d'autre de AB .

D'autre part si KL est un côté de P_1 , par exemple, n'appartenant pas à P_2 , le produit $KL \times \text{dist. } (O, KL)$ intervient dans les nombres attachés à P et à P_1 et avec le même signe puisque P et P_1 sont du même côté de KL .

Donc, après réduction des termes semblables dans la somme des expressions, à l'aide de O , des nombres attachés à P_1 et à P_2 , on trouve l'expression, à l'aide de O , du nombre attaché à P .

β étant ainsi prouvée, le nombre attaché à un polygone sera la somme de ceux attachés aux triangles d'une quelconque des décompositions de P en triangles; donc ce nombre sera positif et vérifiera la condition γ si le nombre attaché à un triangle est positif et indépendant de la position du triangle dans le plan.

Or, calculons le nombre relatif à un triangle ABC en prenant O en A , nous le trouvons égal à $\frac{1}{2}BC \times \text{hauteur issue de } A$.

La démonstration est achevée; on la présente généralement sous la forme suivante: on prend O fixe; on démontre β , puis, ayant ainsi ramené le calcul du nombre attaché à P à l'addition des nombres attachés à des triangles, exactement comme plus haut, on vérifie directement que, dans un triangle, les trois produits de ses côtés par les hauteurs correspondantes sont égaux et que, quelle que soit la position du point O par rapport au triangle, le nombre attaché à ce triangle est égal à ce demi produit. Ce sont ces constatations que nous avons remplacées par le raisonnement plus ramassé, mais moins élémentaire, relatif au passage de O à O' . La démonstration se réduit donc à ceci: Des hypothèses α , β , γ résultaient des manières innombrables de calculer l'aire; parmi elles nous en choisissons une bien déterminée; de cette façon nous satisfaisons à la partie principale de la condition α : à chaque domaine nous attachons un nombre bien déterminé. Puis nous vérifions que ce nombre satisfait aux conditions β et γ , et de plus est positif.

34. — C'est en somme exactement ce que nous avons fait dans notre première méthode; à cela près que nous n'avons pas discriminé quelles étaient, parmi toutes les propriétés de l'aire

concrète, celles que nous utilisons dans notre construction mathématique; nous n'avons donc pas énoncé α , β , γ . En fait, l'ordre que nous avons suivi est exactement celui que l'on suit toujours quand on a à traduire mathématiquement une notion concrète: on commence par utiliser *tout* ce que l'expérience vous a appris sur la notion; puis, quand on a réussi à construire une première définition mathématique, on peut se proposer de l'épurer en fixant exactement ce qui a été utilisé avec raison. L'axiomatique se fait en dernier, quand le principal a déjà été traité; mais alors, elle fixe exactement la valeur du résultat obtenu, en prépare les généralisations, etc.

Donc, à des détails près d'exposition, nos deux méthodes suivent la même marche, ainsi on ne pourrait reprocher à la seconde son caractère de vérification¹ sans le reprocher à la première. On ne peut reprocher à celle-ci l'emploi artificiel du réseau T , sans reprocher à la deuxième l'emploi du point O . La seule différence profonde est que la première, utilisant une définition générale de l'aire, s'applique dans des cas plus étendus, tandis que la seconde, utilisant un mode d'évaluation spécial aux aires polygonales, est d'application plus restreinte; par contre, elle possède les avantages d'élégance des procédés finis, elle met à part les domaines polygonaux à la façon dont, ordinairement, on distingue des autres les nombres commensurables, ainsi qu'il a été rappelé au chapitre précédent.

35. — Nous pouvons maintenant, utilisant ces remarques, construire de nouveaux exposés de la théorie des aires; voici le seul qui vaille d'être indiqué ici. Nous avons, dans le second procédé, appliqué en somme la formule d'intégration en coordonnées polaires et, dans le premier, la formule d'intégration en coordonnées rectilignes rectangulaires; on peut évidemment particulariser et, par le procédé des arpenteurs, obtenir une méthode finie applicable aux seuls polygones. On opérera donc comme il suit.

α . — Une direction ωy ayant été choisie, à tout polygone P

¹ Caractère commun à toutes les démonstrations d'existence d'un être E : admettant provisoirement l'existence de E , on en déduit une construction de E que l'on vérifie fournir un résultat satisfaisant à toutes les conditions requises.

nous attachons le nombre $\frac{1}{2}(B_1 + b_1)h_1 + \frac{1}{2}(B_2 + b_2)h_2 + \dots$, $B_1, b_1; B_2, b_2; \dots$ étant les longueurs des bases des trapèzes en lesquels P est décomposé par les parallèles à ωy menées par les sommets de P et $h_1, h_2, \dots$ les hauteurs respectives de ces trapèzes.

Dans cet énoncé on considère comme un trapèze un triangle dont un côté est parallèle à ωy ; pour un tel trapèze l'une des deux bases est de longueur nulle.

β . — Soit un trapèze (ou triangle) T de bases parallèles à ωy ; partageons le en T_1 et T_2 par une sécante qui rencontre ses bases (et non leurs prolongements), d'après son expression même, le nombre (T) attaché à T est la somme des nombres (T_1) , (T_2) attachés à T_1 et à T_2 ; c'est un cas particulier de la proposition β .

Un autre cas particulier est celui où T est divisé en T_1 et T_2 par une parallèle aux bases; grâce au cas précédent on peut supposer que T est un triangle ABC de base BC parallèle à ωy , soit DE la sécante. Le nombre (T) est $\frac{1}{2}BC \cdot \text{dist.}(A, BC)$ ou, comme on le vérifie de suite, $\frac{1}{2}AB \cdot \text{dist.}(C, AB)$; or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AB \cdot \text{dist.}(C, AB) &= \frac{1}{2}AD \cdot \text{dist.}(C, AD) + \frac{1}{2}DB \cdot \text{dist.}(C, DB) \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot \text{dist.}(D, AC) + \frac{1}{2}BC \cdot \text{dist.}(D, BC) = \left[\frac{1}{2}AE \cdot \text{dist.}(D, AE) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}EC \cdot \text{dist.}(D, EC) \right] + \frac{1}{2}BC \cdot \text{dist.}(D, BC) = \frac{1}{2}AE \cdot \text{dist.}(D, AE) \\ &+ \left[\frac{1}{2}DE \cdot \text{dist.}(C, DE) + \frac{1}{2}BC \cdot \text{dist.}(D, BC) \right] = (T_1) + (T_2). \end{aligned}$$

Soit maintenant le cas général d'un polygone P , partagé en deux polygones adjacents P_1, P_2 . Pour évaluer les nombres (P) , (P_1) , (P_2) attachés à ces polygones, on peut utiliser les décompositions faites par toutes les parallèles à ωy passant par les sommets de ces trois polygones, alors que la définition ne fait usage que de certaines de ces parallèles, à cause du second cas particulier étudié.

Examinons les contributions dans (P) , (P_1) , (P_2) des trapèzes limités par deux parallèles à ωy consécutives; les trapèzes qui comptent dans (P) sont partagés, à la façon examinée dans le premier cas particulier, par les côtés de P_1 et P_2 qui leur sont

intérieurs, en trapèzes partiels dont les uns comptent dans (P_1) et les autres dans (P_2) ; donc, à cause du premier cas particulier,

$$(P) = (P_1) + (P_2) .$$

γ . — Pour démontrer la proposition (γ) il suffira d'évaluer le nombre attaché à un triangle ABC; on le connaît déjà si l'un des côtés est parallèle à ωy . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que ce soit la parallèle à ωy menée par C qui le divise en deux triangles ACD, BCD, on aura

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{1}{2} CD \text{ dist. } (A.CD) + \frac{1}{2} CD \text{ dist. } (B.CD) \\ &= \frac{1}{2} AD \text{ dist. } (C.AD) + \frac{1}{2} BD \text{ dist. } (C.BD) = \frac{1}{2} AB \text{ dist. } (C.AB). \end{aligned}$$

36. — Doit-on adopter dans l'enseignement l'un des trois exposés, complets au point de vue logique, que nous venons d'obtenir, ou quelque autre procédé analogue ?

Le premier, je l'ai déjà dit, serait sans doute trop savant et compliqué pour les élèves moyens, une expérience seule permettrait d'en décider; les deux autres leur seraient plus accessibles. Les élèves pourtant comprendraient mal l'intérêt de cette vérification de α , β , γ , qui, ne venant qu'après qu'on a beaucoup utilisé ces énoncés, conduirait peut-être à penser qu'on peut toujours remettre en question ce qui a été démontré et donnerait ainsi une singulière idée du raisonnement logique. Il est certain, en tout cas, que le second exposé est bien connu, qu'il a été introduit depuis longtemps dans des manuels, et que, pourtant, il n'a pas pénétré dans l'enseignement. Les professeurs ne voient donc pas d'inconvénient à admettre α , β , γ , implicitement ou explicitement; je crois, avec eux, que cela n'a aucun inconvénient. Il est nécessaire seulement de ne rien dire d'inexact sur la portée de l'exposé que l'on adopte et, pour cela, de s'en être bien informé en comparant soigneusement ce que l'on fait à ce qu'il faudrait faire pour tout prouver. Faute d'avoir effectué cette confrontation certains ont fait de curieuses erreurs.

On a cru, par exemple, que les procédés classiques qui conduisent à transformer chaque rectangle R en un rectangle ρ

dont une dimension est l'unité suffisaient pour résoudre le problème des aires pour les rectangles; l'aire de R étant alors la seconde dimension du rectangle ρ . Il y a là, certes, une manière de définir l'aire; mais il n'est nullement évident que d'autres procédés que les procédés classiques ne conduiraient pas à un autre rectangle ρ comme associé au même rectangle R , donc à une autre aire.

37. — Précisons en traitant le cas des équivalences finies. Deux polygones sont dits équivalents de façon finie si on peut les décomposer chacun en un même nombre fini de triangles, deux à deux égaux. Montrons que, par équivalence finie, tout triangle est transformable en un rectangle ρ , d'où il résultera qu'un polygone quelconque est équivalent au rectangle ρ formé d'un nombre fini de tels rectangles ρ correspondant aux triangles provenant d'une décomposition du polygone.

Or, soient un triangle ABC , A', B' les milieux de CA et CB ; faisons tourner de 180° en $B'B'B$ le triangle $A'B'C$ autour de B' ; nous transformons ABC en un parallélogramme $ABB''A'$; soit M un point quelconque de $A'B''$. Faisons subir au triangle $AA'M$ la translation AB , nous avons le parallélogramme $ABNM$; sur lequel nous pouvons opérer de même, etc. Donc, comme on peut aussi intervertir les rôles de A et B , on transforme $AB B''A'$ en n'importe lequel des parallélogrammes de même base AB et de même hauteur correspondante.

Parmi ces parallélogrammes $ABDE$, il y en a pour lesquels AE est un multiple entier d'une longueur donnée l .

Si, par exemple, $AE = 3l$, en partageant AE en trois parties égales et en menant par les points de division des parallèles à AB , on partage $ABDE$ en trois parallélogrammes égaux qui, arrangés dans un autre ordre, donnent un parallélogramme $\alpha\beta\delta\varepsilon$, $\alpha\beta$ étant 3 fois AB , $\alpha\varepsilon$ étant l . Opérant maintenant sur $\alpha\beta\delta\varepsilon$ comme sur $ABB''A'$, $\alpha\varepsilon$ jouant le rôle de AB , on parvient à n'importe lequel des parallélogrammes de base $\alpha\varepsilon$ et dont la base parallèle est portée par $\beta\delta$; en particulier à celui qui est un rectangle.

Si on a pris $l = 1$, on a donc transformé le triangle ABC en un rectangle ρ dont un des côtés est égal à 1. Quel est l'autre côté?

$ABB''A'$ a pour base AB et pour hauteur correspondante la moitié de la hauteur de ABC issue de C . Dans le passage de $ABB''A'$ à $ABMN$, AB est resté le même ainsi que la hauteur correspondante, mais l'autre base et l'autre hauteur ont changé. Seulement, si on remarque que le produit d'une base par la hauteur correspondante est le même pour les deux bases d'un parallélogramme, on voit que ce produit reste le même dans le passage de $ABB''A'$ à $ABMN$ et dans toutes les transformations ultérieures. D'où il résulte que si b est la base de ABC , h la hauteur correspondante, pour tous les parallélogrammes obtenus le produit de la base par la hauteur est $\frac{1}{2}bh$.

Le second côté du rectangle ρ est donc $\frac{1}{2}bh$. Plus généralement, étant donné un polygone P , nous avons appris, en décomposant P en triangles et en transformant chaque triangle en un rectangle ρ , à transformer par équivalence finie P en un rectangle dont l'une des dimensions est 1 et l'autre égale à la somme $\sum \frac{1}{2}bh$ étendue aux divers triangles considérés.

Y a-t-il là une théorie complète des aires ? Non, car il n'est pas prouvé que l'aire obtenue est unique, c'est-à-dire indépendante de celle des décompositions en triangles utilisée. Le croire serait d'abord commettre une faute analogue à celle que nous reprochons si souvent à nos élèves quand, par exemple, ils concluent qu'un nombre est décomposable d'une seule manière en facteurs premiers alors qu'ils ont seulement constaté que le procédé particulier de décomposition employé donnait un résultat déterminé.

Précisons, nous avons vu que deux polygones ne peuvent être transformés l'un en l'autre, par équivalence finie, à l'aide de notre procédé, que si les nombres que nous leur avons attachés sont les mêmes. Mais nous savons de plus que, dans le cas de deux parallélogrammes, cette condition est suffisante; il en résulte de suite qu'elle est aussi suffisante pour deux polygones quelconques. Partant de là on montrerait que, *s'il est possible de satisfaire aux conditions α , β , γ* , les nombres aires sont déterminés à un facteur près, c'est-à-dire de prouver δ .

Ainsi, cette quatrième théorie des aires est exactement équiva-

lente à la théorie classique ¹, comme celle-ci elle s'appuie sur α , β , γ , prouve δ et donne la détermination des aires, en ce qui concerne les polygones.

Pour compléter cette quatrième théorie il faudra prouver α , β , γ ; par l'un des trois procédés que nous avons indiqués, par exemple. Puisqu'on ne s'occupe que de polygones, les deux derniers surtout sont indiqués. On verra dans les *Grundlagen der Geometrie*, de M. Hilbert, la forme simple que l'on peut alors donner au second procédé. Le troisième pourrait être utilisé de façon analogue. Si des simplifications sont possibles c'est que maintenant, plus nettement encore qu'auparavant, tout se réduit à montrer que le nombre défini est bien déterminé. Car, s'il en est ainsi, β et γ en résultent puisque, β , le nombre est défini par une décomposition du polygone et que, γ , il est défini pour un triangle indépendamment de la position de celui-ci.

38. — Ainsi, la théorie est complète quand on prouve qu'on ne peut jamais partager un polygone en un nombre fini de morceaux polygonaux de telle façon que ces morceaux arrangés autrement fournissent seulement un polygone intérieur au premier. C'est cette propriété qui est le fondement géométrique de la théorie des aires. Pour les polygones, celle-ci peut être décomposée en trois parties :

1° Tout polygone est équivalent de façon finie à un rectangle dont un côté est égal à un segment donné.

2° Deux tels rectangles ne sont pas équivalents si leurs seconds côtés sont inégaux.

3° La mesure des seconds côtés.

La troisième partie c'est la mesure des longueurs, l'introduction même du nombre en général; les deux autres ne supposent que la notion d'entier et, pour cette raison, on dira volontiers qu'elles sont de nature purement géométrique. Mais, si nous avons démontré la première par un raisonnement purement géométrique, les démonstrations indiquées de la deuxième partie font appel à la troisième partie, donc à la notion du nombre en général.

¹ Plus élégante que celle-ci elle a, d'autre part, l'inconvénient de ne pouvoir être transposée pour les volumes car Dehn a montré que deux polyèdres qui ont même volume ne sont pas en général transformables l'un en l'autre par équivalence finie.

Jusqu'ici, nul n'a su démontrer la deuxième partie, c'est-à-dire le fait géométrique qui est à la base de la théorie des aires des polygones dans la méthode de l'équivalence finie, sans faire appel à la notion générale du nombre; et c'est en somme la notion d'aire, acquise autrement pourrait-on dire, qui justifie, après coup, la méthode des équivalences.

39. — Ce fait géométrique nous est pourtant si familier, de par nos expériences journalières, que nous avons quelque peine à admettre qu'il faut le démontrer; ne s'agit-il pas, en effet, simplement de la place qu'occupe un domaine indépendamment de sa position dans l'espace et de l'agencement de ses parties ? Cette *place*, ce serait l'aire et le nombre dont nous avons parlé ne serait que la mesure de l'aire; mesure qu'il conviendrait de ne pas confondre avec l'aire.

On reconnaît là, malgré la vulgarité du mot *place*, une présentation métaphysique analogue à celle relative aux entiers et que j'ai critiquée. Un entier, c'était ce qu'avaient de commun toutes les collections déduites d'une collection par changement de l'ordre et de la nature des objets qui la composaient; une aire, ce serait ce qui est commun à tous les domaines déduits d'un domaine par changement de position et d'arrangement des parties de celui-ci. Un entier métaphysique avait une notation décimale; une aire métaphysique aurait une mesure, ce serait un nombre métaphysique qui pourrait être noté dans le système décimal.

Et quand on songe à ce qu'est le nombre métaphysique non entier, on voit à quel point les entités se superposent; mais comme tout cela est inutile mathématiquement, on n'adopte jamais franchement cette présentation métaphysique de la définition. Cependant, pour beaucoup, l'aire est restée différente du nombre qui la mesure; pour moi, l'emploi du mot mesure dans la dénomination « mesure des aires » a la même signification que pour la « mesure des longueurs »: il rappelle qu'on doit avoir choisi une unité pour pouvoir parler de l'aire ou de la longueur, lesquelles sont des nombres. Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement. Ni quand il

s'agit de juger de la valeur logique d'une théorie; l'erreur sur l'aire des rectangles, dont j'ai parlé, vient sans doute de ce que, tout en examinant si l'existence de l'aire avait été prouvée logiquement, on conservait quelque peu l'idée que l'aire est une notion première dont l'existence n'a pas à être prouvée.

Il y eut une époque où le fait qui nous occupe résultait d'une sorte d'axiome à tout faire: *le tout est plus grand que la partie*, que l'on utilisait et pour les longueurs et pour les aires et pour les volumes. Comment nous en sommes nous passés ?

Pour les longueurs: les axiomes relatifs au mouvement, qui nous ont servi, impliquaient en particulier que si on transporte AB sur la droite qui le contient de façon que A vienne entre les positions primitives de A et de B, alors B viendra en dehors de ces positions; ceci, c'est l'axiome: *le tout est plus grand que la partie*, que nous avons donc encore admis sous une forme précisée.

Pour les aires: les trois méthodes que nous avons indiquées déduisent le fait que les deux rectangles $1, h$ et $1, h'$ ne sont pas équivalents du fait que les longueurs h et h' ne sont pas équivalentes. L'axiome pour le cas des aires a été déduit de l'axiome pour le cas des longueurs; nous avons rencontré les nombres non entiers dans nos démonstrations parce que nous raisonnions sur les côtés de divers rectangles et que l'on emploie toujours le nombre pour individualiser et distinguer les divers segments. On pourrait, certes, masquer cet emploi; ce ne serait cependant pas là la démonstration purement géométrique à laquelle nul n'est encore parvenu, je l'ai dit, et, après ces explications, il paraîtra sans doute peu probable qu'on puisse jamais la construire car pour être vraiment différente des précédentes elle ne devrait pas utiliser l'axiome relatif aux longueurs.

40. — Maintenant que nous connaissons bien la portée exacte de la théorie classique, que nous voyons bien les difficultés à vaincre pour la compléter et les objections d'ordre pédagogique qui s'opposent à l'emploi d'un exposé logiquement complet, nous sommes mieux en mesure d'apporter quelques améliorations à l'enseignement.

Je n'en proposerai que deux. L'une d'elles est accessoire;

se passer du théorème de proportionnalité des aires de rectangles ayant un côté commun aux longueurs des autres côtés et obtenir directement l'aire du rectangle comme au § 25, c'est-à-dire comme dans l'enseignement primaire et dans le calcul intégral. Ce serait plus rapide, plus naturel et cela éviterait des longueurs bien inutiles quand on admet avec nous qu'un rapport d'aires est un rapport de nombres; la méthode qu'on emploierait serait celle que les élèves intelligents pourraient vraiment réinventer d'eux-mêmes. Et on ne serait plus tenté d'invoquer un théorème grandiloquent sur les grandeurs proportionnelles à plusieurs autres, que certains comprennent peut-être, mais auquel ni les élèves, ni moi ne comprenons rien. Je m'occuperai plus tard de ce théorème à l'occasion de la mesure des grandeurs en général.

L'autre amélioration serait de plus d'importance, elle consisterait à admettre que l'aire n'est pas une notion première et à en donner la définition du § 24. Définition qu'on pourrait alléger car on ne raisonnerait pas à partir d'elle; on affirmerait seulement qu'elle permet de prouver les propositions des § 26 à 29, *que l'on énoncerait*. Puis on reprendrait la marche classique. Cette façon de faire est déjà à peu près celle de certains professeurs; c'est celle du manuel de géométrie de Claude Guichard.

41. — Pour bien mettre en évidence l'intérêt de cette modification, traitons d'abord d'une façon complète la question des aires des domaines limités par des arcs de cercle et des segments de droite.

Aire du cercle. — Soit p_K un polygone régulier de K côtés inscrit dans le cercle C , P_K le polygone régulier circonscrit de K côtés. Les nombres n_i et N_i relatifs au cercle sont compris entre les nombres n'_i relatif à p_K et N''_i relatif à P_K , quels que soient K et i . Or pour i augmentant indéfiniment $\frac{n'_i}{100^i}$ et $\frac{N''_i}{100^i}$ tendent vers les aires de p_K et de P_K , le premier en croissant, le second en décroissant, donc les nombres $\frac{n_i}{100^i}$ et $\frac{N_i}{100^i}$ sont compris entre *aire de p_K* et *aire de P_K* . Or, § 30,

$$\frac{\text{aire de } P_K}{\text{aire de } p_K} = \left(\frac{\text{rayon de } C}{\text{apoth. de } p_K} \right)^2 = \frac{R^2}{a_K^2}$$

donc

$$\text{aire de } P_K - \text{aire de } p_K = \text{aire de } p_K \times \left(\frac{R^2}{a_K^2} - 1 \right),$$

quantité qui tend évidemment vers zéro avec $\frac{1}{K}$. Donc un cercle a une aire, cette aire est la limite de celles de p_K et P_K .

En même temps, nous avons montré que l'aire des carrés U_i nécessaires pour couvrir un arc de cercle tend vers zéro quand i croît, donc que tout domaine borné limité par des segments de droite et des arcs de cercle a une aire.

Aire du secteur. — Soit $\alpha = 4235,43 \dots$ l'angle au centre du secteur, en secondes sexagésimales par exemple. Si S est l'aire du cercle, comme ce cercle contient $360 \times 60 \times 60$ secteurs égaux d'ouverture une seconde, chacun d'eux a une aire s égale à $\frac{S}{360 \times 60 \times 60}$ et le secteur considéré a une aire comprise entre $4235 s$ et $4236 s$. Un secteur d'ouverture $0,1$ seconde a une aire $s \times 0,1$ car il y a dix de ces secteurs dans un secteur d'aire s , donc le secteur d'ouverture α a une aire comprise entre $4235,4 \times s$ et $4235,5 \times s$, etc.

On reconnaît le mode de raisonnement que j'ai plusieurs fois préconisé et qui est celui de l'enseignement primaire. Je ne reviens pas sur ce qu'a d'inutilement précisé l'emploi dans ce raisonnement de la numération décimale.

L'aire du secteur étant obtenue et les propriétés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se trouvant acquises pour les domaines limités par des droites et des arcs de cercle, la théorie des aires de ces domaines est terminée ¹.

42. — Comparons maintenant cet exposé à celui des manuels. Certes, ils diffèrent peu, mais ils diffèrent cependant sur un point essentiel: c'est qu'ici nous ne posons pas pour l'aire d'un cercle une définition *arbitraire*. Naturelle certes, mais arbitraire du point de vue logique.

Tous les manuels, en effet, depuis quelque vingt-cinq ans ont adopté le mode d'exposition consistant à dire: la limite des

¹ Il y aurait naturellement à calculer l'aire S du cercle; d'après le § 30, elle est de la forme πR^2 , mais la relation entre le nombre π et la longueur de la circonférence ne pourra être établie qu'après que nous nous serons occupés des longueurs des courbes.

aires des p_k sera appelée, par définition, l'aire du cercle. Ceci dit, certains manuels démontrent l'existence de cette limite, d'autres l'admettent, mais peu importe.

Auparavant, au temps de mon enfance par exemple, on disait tout bonnement puisque les polygones p_k diffèrent de moins en moins du cercle, l'aire du cercle est la limite de celles des p_k . On raisonnait sur l'aire, considérée comme notion première, aussi bien pour le cercle que pour les polygones, et on s'appuyait sur des propriétés non énoncées et supposées de ces aires. Ce n'était évidemment pas satisfaisant logiquement; il se trouvait pourtant qu'on ne disait rien d'incorrect tandis que l'exposé actuel est, à mon avis, entaché d'une faute grossière, non si l'on veut contre la logique, mais contre le bon sens, ce qui est plus grave. En même temps on manifeste cette naïve crédulité en la puissance des mots qui fait espérer qu'une difficulté sera vaincue par un artifice verbal; comme si un véritable progrès pouvait être acquis à si bon marché!

Que fait-on en effet? L'aire du cercle est la limite des p_k ; c'est une définition arbitraire, une dénomination que l'on aurait pu remplacer par toute autre. Il s'en suit qu'il ne suffit pas d'avoir adopté cette dénomination et non une autre pour que le nombre ainsi dénommé aire du cercle se dépêche de rentrer sagement dans la famille de ceux pour qui sont vraies les propriétés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Par suite, de l'aire connue du cercle on ne peut pas déduire logiquement celle du secteur, le croire et faire un prétendu raisonnement c'est errer gravement. L'aire du secteur est $S \frac{\alpha}{360 \times 60 \times 60}$ par définition. De l'aire du secteur, ainsi posée par définition, on ne peut pas déduire par un raisonnement celle du segment; c'est par définition que l'aire du segment est la différence entre l'aire d'un secteur et l'aire d'un triangle.

Si la limite des p_k avait été dénommée le tarababoum du cercle on ne se serait certes pas permis d'en déduire la valeur des tarababoums du secteur et du segment; on se le permet parce qu'au lieu du mot tarababoum on a utilisé le mot aire! C'est là une grossière erreur contre le bon sens. On a pourtant la ressource de prétendre qu'on ne la commet pas, mais qu'on spéculé sur la confusion que ne manqueront pas de faire les élèves en assimilant

cette nouvelle aire à celles qu'ils ont l'habitude de manier; libre à chacun de choisir entre erreur et hypocrisie.

Qu'on ne croie pas, d'ailleurs, se tirer d'affaire en répétant trois fois les mots fatidiques *par définition*, à l'occasion du cercle, du secteur et du segment; car les aires ainsi définies ne pourraient servir à rien. On ne pourrait traiter à leur sujet aucune question, aucun problème, sans rencontrer sur sa route les propositions α , β , γ , δ dont on n'aurait pas le droit de se servir; par exemple, la question classique des lunules d'Hippocrate ne pourrait être traitée.

Il faut donc de toute nécessité être en possession de la notion d'aire avant de calculer les aires; notion entraînant les propriétés α , β , γ , δ pour tous les domaines dont on s'occupera. La méthode du temps de mon enfance, qui utilisait en somme ces propriétés sans les énoncer de la même manière pour tous les domaines, était meilleure que celle des manuels actuels qui fait une discrimination malencontreuse entre les différents domaines; il aurait suffi de débarrasser l'ancienne méthode de l'emploi de l'idée de domaine limite, en disant que l'aire du cercle était comprise entre celles des polygones inscrits p_k et celles des polygones circonscrits P_k , pour la rendre tout à fait acceptable. Elle se raccorderait en somme avec celle que je préconise ici. Bien entendu, dans celle-ci on démontrera ou on admettra l'existence de l'aire pour un domaine limité par des droites et des cercles suivant qu'on aura démontré ou admis l'existence de l'aire pour les polygones.

On pourrait évidemment se borner à dire que l'on pose de la manière choisie les définitions des aires du cercle, du secteur et du segment parce que c'est avec ces définitions, et avec elles seulement, que l'on a les propositions α , β , γ , δ ; mais cela serait avouer qu'il ne s'agit pas de définitions arbitraires, qu'au contraire on a choisi ces dénominations et non d'autres à cause de recherches; seulement on renoncerait à donner idée de ces recherches, alors que les considérations du § 24 suffisent à les faire deviner.

43. — J'en ai fini avec la question des aires planes; pourtant, pour montrer la souplesse du procédé préconisé, envisageons le cas de domaines plans limités par des segments de droites et des arcs de coniques, domaines qu'on rencontre parfois en

géométrie élémentaire. De tels domaines ont-ils une aire, dès qu'ils sont bornés ? En d'autres termes, un arc fini de conique peut-il être recouvert à l'aide de polygones dont la somme des aires est arbitrairement petite ?

S'il s'agit d'un arc d'ellipse nous utiliserons le théorème des projections orthogonales. Soit D un domaine, d une projection orthogonale de D ; prenons, dans le plan de D , le réseau T ayant des côtés parallèles à l'intersection XX' des plans de D et de d , dont l'angle est θ . Un carré U_i a pour projection un rectangle u_i dont le côté parallèle à XX' est $\frac{1}{10^i}$, celui perpendiculaire à XX' est $\frac{\cos \theta}{10^i}$; u_i a une aire égale à $\frac{\cos \theta}{100^i}$. Or D contient n_i carrés U_i et est contenu dans N_i de ces carrés, donc d est contenu dans le polygone formé par N_i rectangles u_i , d'aire $\frac{N_i \cos \theta}{100^i}$ et contient un polygone d'aire $\frac{n_i \cos \theta}{100^i}$. Donc, si D a une aire, d en a une et on a: aire de $d =$ aire de $D \times \cos \theta$.

S'il s'agit d'un arc d'hyperbole ou de parabole, on pourrait utiliser de façon analogue une relation

$$\text{aire de } d \leq \text{aire de } D \times K,$$

entre les aires de deux polygones d et D projections coniques l'un de l'autre; relation dans laquelle K est fixé pour tous les couples d, D situés dans deux régions bornées se correspondant par projection conique. Mais il est plus simple et plus général de prouver que: *tout arc convexe et borné peut être couvert par des polygones dont la somme des aires est arbitrairement petite.*

Soit un tel arc, décomposons-le en arcs partiels tels que chacun d'eux ne soit pas rencontré en plus d'un point par les parallèles à deux directions rectangulaires OX, OY . La possibilité d'une telle décomposition est immédiate, pourtant il serait difficile de la prouver de façon très précise, non à cause du mot convexe, mais parce que les mots courbe, arc de courbe n'ont pas en géométrie élémentaire une définition précise. Quoique il en soit, c'est sur un tel arc partiel que nous allons raisonner; la démonstration vaudra pour les arcs formés d'un nombre fini de ces arcs partiels.

Soit donc un tel arc Γ tout entier couvert par le rectangle

$AA'BB'$ de côtés parallèles à OX, OY et dont deux sommets opposés sont les extrémités A et B de Γ ; soit S l'aire de ce rectangle. Γ est tout entier dans le triangle $AA'B$, ou tout entier dans le triangle ABB' à cause de sa convexité; supposons-le dans $AA'B$. On peut couvrir $AA'B$ à l'aide de rectangles de côtés parallèles à OX et OY et dont la somme des aires surpasse l'aire de $AA'B$ d'aussi peu qu'on le veut. On peut donc supposer cette somme d'aire inférieure à $\frac{2}{3}S$. Ne conservons de ces rectangles que ceux qui contiennent des points de Γ , restreignons chacun d'eux au rectangle de côtés parallèles suffisant pour contenir les mêmes points de Γ ; après ces modifications, nous avons des rectangles d'aire totale inférieure à $\frac{2}{3}S$ et contenant respectivement les arcs $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ dont Γ est la réunion. Si l'on recommence le même raisonnement sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, on couvre Γ à l'aide de rectangles d'aire totale $\left(\frac{2}{3}\right)^2 S$, etc. La démonstration est faite.

Ainsi, la théorie élémentaire des aires que nous avons développée s'applique, en particulier, à tous les domaines bornés limités par un nombre fini de segments de droites et d'arcs de courbes convexes.

Des raisonnements comme le précédent prépareraient, et éclairciraient peut-être, ceux qu'on fera lorsqu'il s'agira de l'intégrale définie. Les élèves ne comprendraient-ils pas plus facilement qu'au passage de la géométrie élémentaire à l'analyse rien d'autre n'a été changé que le langage, plus géométrique avant, plus analytique après? Et peut-être sentiraient-ils quelque peu le progrès accompli: Toujours, en mathématiques, le point de départ initial est concret, le langage aussi est concret, géométrique le plus souvent. Ceci est favorable à l'imagination; trop favorable même car la réalité est très riche; trop de remarques sollicitent l'attention. Aussi les premiers raisonnements n'ont-ils qu'une portée très limitée car ils font état de beaucoup de ces remarques particulières. Peu à peu on isole chaque question des autres, on discerne ce qui est essentiel pour chacune, les raisonnements deviennent plus généraux en même temps que le langage devient plus analytique et abstrait. Cet abstrait n'est pas vide de contenu, bien au contraire le langage n'est devenu abstrait que pour être plus immédiatement applicable à des réalités plus nombreuses.

(A suivre)